2008 新东方考研数学串讲
线性代数

欢迎使用新东方在线电子教材

什么是串讲：串讲就是总复习.在系统复习和做了大量练习的基础上,对全课程内容和方法来个整理和总结.

串讲的特点：

(1)全局性的,宏观上的.定理,命题,性质等不讲证明等细节，看作用和应用.

(2)突出要点,重点,考点,不求全面.

(3)突出纵向联系,不顾及先后顺序.

第一部分(基础篇)　矩阵

本部分是全课程的基础,特别是计算的基础.

本部分概念多而且杂,因此考点多而碎.

关键性概念:矩阵的初等变换,矩阵的乘法,可逆矩阵.

一. 初等变换和初等变换法

1. 矩阵初等变换的应用

矩阵的初等变换应用在两个方面:

(1) 线性方程组的解的情况讨论和求解.

对增广矩阵作初等行变换反映了方程组的同解变换.

(2) 计算矩阵和向量组的秩.

初等行变换和初等列变换都保持矩阵的秩.

在(1)中,只可用行变换,决不可用列变换.在(2)中两类变换都可以用,表示可交替使用.

每一种应用都要用到一种基本运算:用初等(行)变换把一个矩阵化为阶梯形矩阵或简单阶梯形矩阵.

每个矩阵都可用初等行变换化为阶梯形矩阵，每个阶梯形矩阵都可用初等行变换化为简单阶梯形矩阵.

可逆矩阵可以用初等行变换化为单位矩阵.

2. 初等变换法

(1)求方程组的唯一解:例如当 A 是可逆矩阵时,克莱姆法则说 $AX=\beta$ 有唯一解,求解的初等变换法:对增广矩阵 $(A|\beta)$ 作初等行变换,使得 A 变为单位矩阵:

$$(A|\beta)\to(E|\eta),$$

则 η 就是解.

(2) 两种基本矩阵方程:

(I) $AX=B$.　　　　(II) $XA=B$.

这里假定 A 是行列式不为 0 的 n 阶矩阵,在此条件下,这两个方程的解都是存在并且唯一的.

(I) $AX=B$是线性方程组的推广,求解方法:将A和B并列作矩阵$(A|B)$,对它作初等行变换,使得A变为单位矩阵,此时B变为解X.

$(A|B)\to(E|X)$

(II)的解法:对两边转置化为(I)的形式:$A^TX^T=B^T$.再用解(I)的方法求出X^T,转置得X.

$(A^T|B^T)\to(E|X^T)$

(3) 当A可逆时, A^{-1}是矩阵方程$AX=E$的解,于是可用初等行变换求A^{-1}:

$(A|E)\to(E|A^{-1})$

例 1 设 3 阶矩阵 A 有 3 个特征向量, $\eta_1=(1,2,2)^T,\eta_2=(2,-2,1)^T,\eta_3=(-2,-1,2)^T$ 它们的特征值依次为 1,2,3,求 A. (97 四)

例 2 已知 $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\eta_1=(1,-1,0)^T,\eta_2=(1,0,-1)^T,\eta_3=(1,1,1)^T$. 求 $P^{-1}\eta_1,P^{-1}\eta_2,P^{-1}\eta_3$

例 3 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ 求$P^{-1}AP$

3.秩的计算

有关结论:

(1) 矩阵的秩等于它的行(列)向量组的秩.

(2) 初等(行,列)变换不改变矩阵的秩.

(3) 阶梯形矩阵的秩就是它的非零行的个数.

由此得到计算方法如下:

矩阵 A 的秩 $r(A)$: 用初等变换把 A 化为阶梯形矩阵,其非零行数就是 $r(A)$.

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的秩$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$:作矩阵$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$, 用初等变换把$A$化为阶梯形矩阵,其非零行数就是$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.

二. 矩阵乘法

1.两个规律×

设A是m×n矩阵B是n×s矩阵. A的列向量组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,$B$的列向量组为$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$, AB的列向量组为$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$,则根据矩阵乘法的定义容易看出(也是分块法则的特殊情形):

① AB的每个列向量为:$\boldsymbol{\gamma}_i=A\boldsymbol{\beta}_i$, i=1,2,⋯,s.

即$A(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(A\boldsymbol{\beta}_1,A\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,A\boldsymbol{\beta}_s)$.

② 若$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$,则$A\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{\alpha}_1+b_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{\alpha}_n$.

2.乘积矩阵的列向量

乘积矩阵AB的第i个列向量$\boldsymbol{\gamma}_i$是A的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的线性组合,组合的系数就是$B$的第i个列向量$\boldsymbol{\beta}_i$的各分量.

3. **矩阵分解**:当一个矩阵C的每个列向量都是另一个A的列向量组的线性组合时,可以构造一个矩阵 B,使得 $C=AB$.

例如设 $A=(\alpha,\beta,\gamma),C=(\alpha+2\beta-\gamma,3\alpha-\beta+\gamma,\alpha+2\gamma$ 令

$$B=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&-1&0\\-1&1&2\end{pmatrix}\text{则}C=AB$$

例 4 设 3 阶矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),|A|=1,B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_1+4\alpha_2+9\alpha_3)\text{求}|B|$$ （05）

例 5　已知 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=t$，求 $\begin{vmatrix} xb_1+yc_1 & xc_1+ya_1 & xa_1+yb_1 \\ xb_2+yc_2 & xc_2+ya_2 & xa_2+yb_2 \\ xb_1+yc_1 & xc_3+ya_3 & xa_3+yb_3 \end{vmatrix}$

例 6 3 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$满足

$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2=0$，$3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_3=0$，$-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3=0$，

已知$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=a$,求$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|$.

4.用列向量求乘积矩阵:如果矩阵 B 比较简单,则可直接写出 AB 的各列向量来求出它.

例如

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. 乘积矩阵的行向量

<u>乘积矩阵AB的第i个行向量是B的行向量组的线性组合,组合系数就是A的第i个行向量的各分量</u>.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 8 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

对角矩阵在矩阵乘法中的作用:如果一个对角矩阵在矩阵乘法中处于右侧,等同于用它对角线上各数依次乘左边矩阵的各列向量；如果对角矩阵处于左侧,等同于用它对角线上各数依次乘右边矩阵的各行向量.

初等矩阵在矩阵乘法中的作用：初等矩阵在右(左)边乘一个矩阵 A,等同于对 A 作一次相应的初等列(行)变换.

三.可逆矩阵的充分必要条件

n 阶矩阵 A 可逆$\Leftrightarrow A$ 的行列式$|A|\neq 0$

$\Leftrightarrow$ $r(A)=n$

$\Leftrightarrow$ $AX=0$ 只有零解($AX=\beta$有唯一解)

$\Leftrightarrow$0 不是 A 的特征值.

$A-cE$ 可逆$\Leftrightarrow$c 不是 A 的特征值.

例 7　设 n 阶矩阵 A,B 满足 $AB=aA+bB$. 其中 $ab\neq 0$,证明

(1) $A-bE$ 和 $B-aE$ 都可逆.

(2) $AB=BA$.

例 8　设 A,B 都是 n 阶矩阵,c 不是 0,证明

$cE-AB$ 可逆$\Leftrightarrow$ $cE-BA$ 可逆.

例 9 已知n阶矩阵A 满足$A^3=E$.

(1)证明$A^2-2A-3E$可逆.

(2)证明A^2+A+2E可逆.

例 10　设 A,B 都是 n 阶矩阵,并且 A 可逆,证明:

矩阵方程 $AX=B$ 和 $XA=B$ 同解$\Leftrightarrow$ $AB=BA$.

例 11 已知 A,B 都是 n 阶矩阵使得 $A+B$ 可逆.

(1) 在$AB=BA$的条件下证明$B(A+B)^{-1}A=A(A+B)^{-1}B$.

(2) 在A,B都可逆的条件下证明$B(A+B)^{-1}A=A(A+B)^{-1}B$.

(3) 证明$B(A+B)^{-1}A=A(A+B)^{-1}B$的成立不要任何条件.

第二部分(主题篇)　向量组和线性方程组

(本部分是考试的重点和难点)

一. 向量组的线性关系,秩

本部分是的特点是概念性强,抽象,因此是最难的部分,但又是全课程的理论基础,理论制高点,也是考试的重点之所在.

基本概念有:线性表示,线性相关性, 向量组的极大无关组和秩,矩阵的秩.

秩是起到关键性作用的量,它既有用,又好算,应该充分注意它的应用.

1. 线性表示

线性表示有 3 类:

(1)向量$\boldsymbol\beta$可用$\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\ldots,\boldsymbol\alpha_s$ 线性表示(记作$\boldsymbol\beta\to\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\ldots,\boldsymbol\alpha_s$),即n维向量$\boldsymbol\beta$是$\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s$的一个线性组合.

其重要性在于和线性方程组有没有解的关系:"$\boldsymbol\beta$是否可以用$\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s$线性表示? 表示方式是否唯一? "也就是"线性方程组$AX=\boldsymbol\beta$是否有解? 解是否唯一? "其中$A=(\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s)$.

(2) $\boldsymbol\beta_1,\boldsymbol\beta_2,\cdots,\boldsymbol\beta_t$可以用$\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s$线性表示(记作$\boldsymbol\beta_1,\boldsymbol\beta_2,\cdots,\boldsymbol\beta_t\to\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\ldots,\boldsymbol\alpha_s$),即每个$\boldsymbol\beta_i$ 都可以用$\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s$线性表示.

(3) 向量组$\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s$ 和$\boldsymbol\beta_1,\boldsymbol\beta_2,\cdots,\boldsymbol\beta_t$**等价**,即它们互相都可以表示,记作

$\{\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s\}\cong\{\boldsymbol\beta_1,\boldsymbol\beta_2,\cdots,\boldsymbol\beta_t\}$.

线性表示的判断:

(1) $\boldsymbol\beta$可用$\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s$ 线性表示$\Leftrightarrow$$r(\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s,\boldsymbol\beta)=r(\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s)$.

(事实上若$\boldsymbol\beta$不可用$\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s$ 线性表示,则$r(\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s,\boldsymbol\beta)=r(\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s)+1$.)

(2)$\boldsymbol\beta_1,\boldsymbol\beta_2,\cdots,\boldsymbol\beta_t$可以用$\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s$ 线性表示$\Leftrightarrow$

$$r(\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s,\boldsymbol\beta_1,\boldsymbol\beta_2,\cdots,\boldsymbol\beta_t)=r(\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s).$$

从而有

$$r(\boldsymbol\beta_1,\boldsymbol\beta_2,\cdots,\boldsymbol\beta_t)\le r(\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\ldots,\boldsymbol\alpha_s).$$

(3) $\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s$和$\boldsymbol\beta_1,\boldsymbol\beta_2,\cdots,\boldsymbol\beta_t$等价$\Leftrightarrow$

$$r(\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s)=r(\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\cdots,\boldsymbol\alpha_s,\boldsymbol\beta_1,\boldsymbol\beta_2,\cdots,\boldsymbol\beta_t)=r(\boldsymbol\beta_1,\boldsymbol\beta_2,\cdots,\boldsymbol\beta_t).$$

例 12 设$\boldsymbol\alpha_1=(1,2,0,1)$, $\boldsymbol\alpha_2=(1,1,-1,0)$, $\boldsymbol\alpha_3=(0,1,a,1)$,$\boldsymbol\gamma_1=(1,0,1,0)$,$\boldsymbol\gamma_2=(0,1,0,2)$. a 和k 取什么值时, $\boldsymbol\gamma_1+k\boldsymbol\gamma_2$可用$\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\boldsymbol\alpha_3$线性表示?

例 13 设 $\boldsymbol\alpha_1=(1,1,0,-1)^T$, $\boldsymbol\alpha_2=(0,2,1,1)^T$是齐次方程组$AX=0$的基础解系,要让 4 维向量$\boldsymbol\beta=(c_1,c_2,c_3,c_4)^T$是$AX=0$的解, c_1,c_2,c_3,c_4应该满足什么条件?

例 14 给定向量组(Ⅰ) $\boldsymbol\alpha_1=(1,0,2)$, $\boldsymbol\alpha_2=(1,1,3)$, $\boldsymbol\alpha_3=(1,-1,a+2)$和(Ⅱ)$\boldsymbol\beta_1=(1,2,a+3)$, $\boldsymbol\beta_2=(2,1,a+6)$,$\boldsymbol\beta_3=(2,1,a+4)$. 当a为何值时(Ⅰ)和(Ⅱ)等价? a为何值时(Ⅰ)和(Ⅱ)不等价?(03 四)

例 15 求常数a,使得向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)$,$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)$,$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)$线性表示,但是$\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3$不可用$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.(2005 年数学二)

例 16 设(Ⅰ)和(Ⅱ)是两个四元齐次线性方程组,$(1,0,1,1)^T$,$(-1,0,1,0)^T$,$(0,1,1,0)^T$是(Ⅰ)的一个基础解系,$(0,1,0,1)^T$,$(1,1,-1,0)^T$是(Ⅱ)的一个基础解系.求它们的公共解.

例 17 设A是m×n 矩阵,C是m×s 矩阵.证明矩阵方程$AX=C$有解$\Leftrightarrow r(A|C)=r(A)$.

2. 向量组的线性相关性

(1)定义和意义

定义 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是n维向量组,如果存在不全为 0 的一组数$c_1,c_2,\cdots,c_s$使得

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\alpha}_s=0,$$

则说$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性相关**,否则(即要使得$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$,必须$c_1,c_2,\cdots,c_s$全为 0)就说它们**线性无关**.

和齐次线性方程组的关系 "$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关还是无关"也就是"向量方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$$

有没有非零解",也就是"齐次线性方程组$AX=0$有没有非零解."

意义 在s>1 时,线性无关就是每个$\boldsymbol{\alpha}_i$都不能用其它向量线性表示;线性相关就是有向量(不必每个)可以用其它向量线性表示.

(2) 线性相关性的判别:

① 当向量的个数s大于维数n时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$一定线性相关.

如果向量的个数s等于维数n,则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性相关$\Leftrightarrow|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=0$.

② 线性无关向量组的每个部分组都无关.

③ 如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关,则

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$线性无关$\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}$不能用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示.

④ 如果$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$可以用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示,并且t>s,则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关.

⑤ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=s$.

有时还要用定义,例如要证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关,就要说明从$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$可推出$c_1,c_2,\cdots,c_s$全为 0.

例 18 已知非齐次方程组$AX=\boldsymbol{\beta}$有解,证明它的解集合的秩$=n-r(A)+1$.

例 19 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$都是线性无关的n维向量组,证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性相关$\Leftrightarrow$存在非零向量$\boldsymbol{\eta}$,它既可用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示,又可用$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示.

例 20 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性无关,其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是齐次方程组$AX=0$的基础解系.证明$A\boldsymbol{\beta}_1,A\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,A\boldsymbol{\beta}_t$线性无关.

3.向量组的极大无关组和秩

秩是向量组内在线性性质的定量研究.它是刻画向量组相关"程度"的一个数量概念.它表明向量组可以有多大(指包含向量的个数)的线性无关的部分组.

定义 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是n维向量组,(I)是它的一个部分组.如果

① (I) 线性无关.

② (I) 再扩大就线性相关.

就称(I)为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个**极大无关组**.

极大无关组中所包含向量的个数称为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的**秩**,记作$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.

如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$全是零向量(此时极大无关组不存在),则规定$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=0$.

于是,$0\le r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\le$个数s,维数n.

由定义得出:如果$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=k$,则

① $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个部分组如果含有多于k个向量,则它一定的相关.

② $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的每个含有k个向量的线性无关部分组一定是极大无关组.

求 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组的方法：作矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，用初等行变换把$A$化为阶梯形矩阵$B$,则$B$的列向量组和$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 有相同的线性关系,从而对应的部分组有一致的相关性,极大无关相对应.于是B的台角的列号对应的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的部分组是一个极大无关组.

例 21 设 $\alpha_1=(1,-1,2,4)$, $\alpha_2=(0,3,1,2)$, $\alpha_3=(3,0,7,14)$, $\alpha_4=(1,-2,2,0)$, $\alpha_5=(2,1,5,10)$.它们的下列部分组中,是极大无关组的有哪几个?

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. (2) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$. (3) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$. (4) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$.

4.矩阵的秩

(1) 定义

矩阵 A 的秩 $r(A)$ 就是它的行向量组的秩,也就是列向量组的秩.

$r(A)$ 也就是 A 的非 0 子式的阶数的最大值.(即 A 的每个阶数大于 $r(A)$ 的子式的值都为 0,但是 A 有阶数等于 $r(A)$ 的非 0 子式.)

如果 A 是 $m\times n$ 矩阵,则 $0\le r(A)\le \mathrm{Min}\{m,n\}$.

$r(A)=0 \Leftrightarrow A=0$.

当 $r(A)=m$ 时,称 A 为行满秩的; 当 $r(A)=n$ 时,称 A 为列满秩的.

对于 n 阶矩阵 A,则行满秩和列满秩是一样的,此时就称 A 满秩.于是:

n 阶矩阵 A 满秩$\Leftrightarrow r(A)=n$(即 A 的行(列)向量组无关)$\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆.

(2)性质

① $r(A^T)=r(A)$.

② 如果 c 不为 0,则 $r(cA)=r(A)$.

③ $r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$.

④ $r(AB)\le \mathrm{Min}\{r(A),r(B)\}$.

⑤ 当 A(或 B)可逆时,$r(AB)=r(B)$(或 $r(A)$).

⑥ 如果 $AB=0$,n 为 A 的列数(B 的行数),则 $r(A)+r(B)\le n$.

⑦ 如果 A 列满秩($r(A)$等于列数),则 $r(AB)=r(B)$.

例 22 设 A 是 n 阶矩阵.证明 $r(A)=1 \Leftrightarrow$ 存在 n 维非零列向量 α 和 β,使得 $A=\alpha\beta^T$

例 23

3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} b-1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，已知 $r(\boldsymbol{AB})$ 小于 $r(\boldsymbol{A})$ 和 $r(\boldsymbol{B})$,求 a,b 和 $r(\boldsymbol{AB})$.

例 24 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_s$ 是一组 n 维向量，$\beta_i=A\alpha_i$，i=1,2，…，s.证明:

(1) $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\le r(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_s)$.

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $r(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_s)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$.

例 25 设 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_s$ 是齐次方程组 $AX=0$ 的基础解系，

$\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2,\ \beta_2=\alpha_2+t\alpha_3,\cdots,\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+t\alpha_s,\beta_s=\alpha_s+t\alpha_1$.t 取什么值时 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也是 $AX=0$ 的基础解系?

二. 线性方程组解

线性方程组是课程的最主要部分,是考试的最大重点,但是考点很集中(解的情况的判别和通解的计算),有关的结论又十分明确.但是近年来考题的发展趋势应该重视:考试重点转向概念化,考题渐渐脱离传统题型,出现许多有新意的题.

1. 线性方程组解的情况的判别

(1) 对于方程组 $AX=\beta$,判别其解的情况用三个数:未知数的个数 $n, r(A), r(A|\beta)$.

① 无解 $\Leftrightarrow r(A)<r(A|\beta)$.

② 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A|\beta)=n$

(当 A 是方阵时,就推出克莱姆法则.)

③ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A|\beta)<n$.

方程的个数 m 虽然在判别公式中没有出现,但它是 $r(A)$ 和 $r(A|\beta)$ 的上界,因此

当 $r(A)=m$ 时, $AX=\beta$ 一定有解.

当 m<n 时,一定不是唯一解.

(2) 对于齐次方程组 $AX=0$,判别解的情况用两个数: n, $r(A)$.

有非零解 $\Leftrightarrow r(A)\le n$ (即:只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$).

2. 基础解系和通解

(1) 齐次方程组的基础解系

如果齐次方程组 $AX=0$ 有非零解,则它的解集(全部解的集合)是无穷集,称解集的每个极大无关组为 $AX=0$ 的**基础解系**.

于是,当 η_1, $\eta_2,\cdots$, η_s 是 $AX=0$ 的基础解系时:

向量 η 是 $AX=0$ 的解 $\Leftrightarrow \eta$ 可用 η_1, $\eta_2,\cdots$, η_s 线性表示.

定理 设 $AX=0$ 有n个未知数,则它的基础解系中包含解的个数(即解集的秩)=n-r(A).

于是,判别一组向量 η_1, $\eta_2,\cdots$, η_s 是 $AX=0$ 的基础解系的条件为

① η_1, $\eta_2,\cdots$, η_s 是 $AX=0$ 的一组解.

② η_1, $\eta_2,\cdots$, η_s 线性无关.

③ s=n-r(A).

(2) 通解

当 η_1, $\eta_2,\cdots$, η_s 是 $AX=0$ 的基础解系时, $AX=0$ 的通解为:

$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_s\eta_s$, $c_1,c_2,\cdots,c_s$ 任意.

如果 ξ_0 是非齐次方程组 $AX=\beta$ 的一个解, η_1, $\eta_2,\cdots$, η_s 是 $AX=0$ 的基础解系时, $AX=\beta$ 的通解为:

$\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_s\eta_s$, $c_1,c_2,\cdots,c_s$ 任意.

有一种典型的考题出现频率很高的,如下面的例

确定 p,t 的值,使得下面方程组有无穷多解,并求通解

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1\\3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1\\x_1-x_2-6x_3-x_4=t\end{cases}$$

这类题既考到了解的情况的判断,有考到了求通解这个重要的计算. 对这类题,应该会熟练计算. 但是还应该注意到考题概念化的新动态,并关注新题型.

例 26 已知 $\xi_1=(1,1,-1,-1)^T$ 和 $\xi_2=(1,0,-1,0)^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=2 \\ x_2+px_3+qx_4=s \\ 2x_1+tx_2-x_3+tx_4=r \end{cases}$$

的解, $\eta=(2,-2,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是它的导出组的解, 求方程组的通解.

例 27 已知矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, 其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$, 并且有 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$), 求 $AX=\beta$ 的通解. (02 一, 二)

例 28 已知 3 阶矩阵 *A* 的第一行为(a, b, c), a, b, c 不全为 0, 矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$, 并且 *AB*=0, 求齐次线性方程组 *AX*=0 的通解. (2005 年数学一, 二)

例 29 已知齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$$

同解, 求 a, b, c. (2005 年数学三, 四)

例 30 设(Ⅰ)和(Ⅱ)是两个四元齐次线性方程组,(Ⅰ)的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}2&3&-1&0\\1&2&1&-1\end{pmatrix}$$

(Ⅱ)的一个基础解系为 $(2,-1,\mathrm{a}+2,1)^{\mathrm{T}}$, $(-1,2,4,\mathrm{a}+8)^{\mathrm{T}}$. 已知(Ⅰ)和(Ⅱ)有公共非零解, 求 a, 并求出它们的全部公共解. (02 四)

注:关于两个齐次方程组有公共非零解的判断**.**

(1)如果都给出了方程组的具体形式, 有公共非零解就是联立方程组有非零解**.**

(2)如果一个给了系数矩阵 *A*, 另一个给出了基础解系 $\eta_1,\ \eta_2,\cdots,\ \eta_s$, 则有公共非零解 $\Leftrightarrow A\eta_1,\ A\eta_2,\cdots,\ A\eta_s$ 线性相关.

(3)两个都给出了基础解系 $\eta_1,\ \eta_2,\cdots,\ \eta_s$ 和 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$, 则有公共非零解 $\Leftrightarrow \eta_1,\ \eta_2,\cdots,\ \eta_s,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$ 线性相关.

第三部分(应用篇) 特征向量与特征值 相似和对角化 二次型

这部分的概念比较多,但是并不抽象,只要前面的基础掌握得好了,这些概念不难理解. 并且这部分的考题类型比较稳定,变化和灵活性小. 主要题型有:

特征值的计算,矩阵对角化的判断和对角化的实现,用正交变换化二次型为标准二次型,正定的判断等.

一.特征值的计算

求一个 n 阶矩阵 A 的特征值主要依据下面的命题:

λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$，即 $(\lambda E - A)$ 不可逆.

即: λ 不是 A 的特征值 $\Leftrightarrow A - \lambda E$ 可逆.

特别地:0 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow A$ 不可逆.（或矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 0 不是 A 的特征值.）

把 $|\lambda E - A|$ 称为 A 的特征多项式，A 的特征值就是它的根.

$|\lambda E - A|$ 是 λ 的 n 次多项式, 有 n 个根, 因此 A 有 n 个特征值, 记作 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 它们有以下性质:

① $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = tr(A)$（$A$ 的迹数，即主对角线上元素之和).

② $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$.

③ 设 λ 是 A 的特征值，则它的重数 $\geq n - r(\lambda E - A)$.

计算特征值的步骤为先求出特征多项式, 在求它的根. 一般来说是很困难的. 但是有两类特殊的矩阵的特征值很好计算, 并且在考题中非常有用.

<u>三角矩阵(包含对角矩阵), 则它的特征值就是对角线上的元素.</u>

<u>秩为 1 矩阵特征值为</u> $\underline{0,0,\cdots,0}$, $\underline{tr(A)}$.

还有一个对计算特征值很有用的命题:

的特征值

如果 A 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则

① $f(A)$ 的特征值是 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$.

② 如果 A 可逆，则

A^{-1} 的特征值是 $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \cdots, 1/\lambda_n$；

A^* 的特征值是 $|A|/\lambda_1$, $|A|/\lambda_2$, …, $|A|/\lambda_n$.

从①还可以推出:如果 $f(A) = 0$, 则 A 的每个特征值是 λ 的都满足 $f(\lambda) = 0$.

例 31

求矩阵 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 的特征值.

例 32　求 $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{vmatrix}$

例 33　设 $\alpha=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(-2,1,-2)^{\mathrm{T}}$，$A=E-\alpha\beta^T$. 求 $\left|A^2-2A+2E\right|$.

二. 矩阵对角化的判断和实现问题

设 A 是 n 阶矩阵, 要判断 A 是否相似于对角矩阵?如果是, 怎么构造可逆矩阵 P， 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵？结论是:

1. 可逆矩阵 $P=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵 $\Leftrightarrow$ $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 都是 A 的特征向量.

（$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 特征值依次为 $P^{-1}AP$ 对角线上的各数.）

2. A 可对角化 $\Leftrightarrow$ 对于 A 的每个特征值 λ, 其重数 $=n-r(\lambda E-A)$.

例 34

已知 3 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 有一个二重特征值,求 a,并且讨论 A 可否对角化.(04)

例 35 设 n 阶矩阵 A 的秩为 1. 证明: A 可对角化 $\Leftrightarrow tr(A)\neq 0$.

例 36 设 n 阶矩阵 A 满足 $(A-aE)(A-bE)=0$, 其中 $a\neq b$. 证明:

(1) A 可对角化.

(2) $r(A-aE)+r(A-bE)=n$.

三. 实对称矩阵的对角化

实对称矩阵特征值都是实数, 它一定可对角化, 并且属于不同特征值的特征向量互相正交, 从而可以用正交矩阵将其对角化, 即如果 A 是实对称矩阵, 则存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{-1}AQ$ 是对角矩阵.

例 37　设 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 2, 又 6 是它的二重特征值, 向量 $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $(2,1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $(-1,2,-3)^{\mathrm{T}}$ 都是属于 6 的特征向量.

(1) 求 A 的另一个特征值与相应的特征向量.

(2) 求 A. (04 四)

四. 实二次型用正交变换标准化

这是常见的考试题.

设 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ （A 是一个实对称矩阵）, 用正交变换将它标准化即:

①构造正交矩阵 Q, 使得 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ$ 是对角矩阵.

②作正交变换 $X=QY$，则它把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为标准二次型 Y^TQ^TAQY.

例 38 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a.

(2) 求作正交变换 $X=QY$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形.

(3) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

解

(1) $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵 A 为 $\begin{bmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，由 $r(A)=2$ 知 $|A|=0$，由此求出 $a=0$.

(2) 第一步先求特征值

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$，求出其特征值为 2, 2, 0.

然后作 3 个单位正交的特征向量

求属于 2 的特征向量:

$$2E-A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是属于 2 的两个无关的特征向量，它们是正交的，单位化得到

$(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,0)^T$ 和 $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

求属于 0 的特征向量:

$$0E-A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$ 是属于 0 的的特征向量，单位化：$(\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2,0)^T$

构造正交矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$，则 Q 使得 Q^TAQ 是对角矩阵，对角线上的元素为 2, 2, 0.

作正交变换 $X=QY$，它把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $2y_1^2+2y_2^2$.

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+2x_3^2$,

于是 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 即 $x_1+x_2=0, x_3=0$，从而 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的通解为(c,-c,0),c 任意.

五. 惯性指数和规范形

实二次型的正(负)惯性指数就是它化出的规范(标准)二次型的正(负)平方项的个数.

实对称矩阵 A 的正(负)惯性指数也就是它的正(负)特征值的个数.

于是,两个实对称矩阵合同 $\Leftrightarrow$ 它们的正(负)特征值的个数对应相等.

两个实对称矩阵相似 $\Leftrightarrow$ 它们的特征值完全相同.

例 39　设 A 是一个可逆实对称矩阵，记 A_{ij} 是它的代数余子式. 二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_i x_i.$$

(1)用矩阵乘积的形式写出此二次型.

(2)　$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形和 X^TAX 的规范形是否相同?为什么?(01 三)

例 40 设

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\text{则}$$

(A) A 与 B 既合同又相似.

(B)　A 与 B 合同但不相似.

(C)　A 与 B 不合同但相似.

(D)　A 与 B 既不合同又不相似.

六. 正定问题

实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 正定即:当 $X\neq 0$ 时, X^TAX 一定>0.

实对称矩阵 A 正定即当 $X\neq 0$ 时,　X^TAX 一定>0.

实对称矩阵 A 正定 $\Leftrightarrow$ 合同于单位矩阵.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩 C，使得 $A=C^TC$.

$\Leftrightarrow$ A 的特征值都是正数.

$\Leftrightarrow$ A 的顺序主子式全大于 0.

判断正定性的方法: **顺序主子式法,特征值法,定义法.**

例 41　设 A 是 3 阶实对称矩阵,满足 $A^2+2A=0$，并且 $r(A)=2$.

(1) 求 A 的特征值.

(2)　当实数 k 满足什么条件时 $A+kE$ 正定?(02 三)

$$D=\begin{bmatrix}A&C\\C^T&B\end{bmatrix}$$

例 42 设 $D=\begin{bmatrix}A&C\\C^T&B\end{bmatrix}$ 为正定矩阵,其中 A,B 分别为 m,n 阶对称矩阵, C 为 m×n 矩阵.

(1) 计算 $P^T DP$，其中 $P=\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$

(2) 利用(1)的结果，判断 $B-C^T A^{-1}C$ 是否为正定矩阵，并证明你的结论.

解 (1) $P^T DP=\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ 0 & E_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ 0 & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B-C^T A^{-1}C \end{bmatrix}$

(2)因为 D 为正定矩阵，P 是实可逆矩阵，所以 $P^T DP$ 正定.

用特征值法：$P^T DP$ 正定，它的特征值都大于 0. 又显然 $P^T DP$ 的特征多项式等于 A 的特征多项式和 $B-C^T A^{-1}C$ 的特征多项式的乘积，从而 $B-C^T A^{-1}C$ 的特征值也是 $P^T DP$ 的特征值，都大于 0，于是矩阵 $B-C^T A^{-1}C$ 正定.