基础班微积分辅导第 11 讲

多元函数微分学 I

11.1 多元函数的概念

定义11.1 设Ω是R^n的一个子集，如果按照某种确定的法则f，使得每个$\vec{x}\in\Omega$，唯一地对应于一个实数u，则称f为定义在Ω上的一个（n元）函数，记成：$f:\Omega\to R$

其中$\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\Omega$是自变量，$\Omega$是这个函数的定义域.

实数u称为$\vec{x}$所对应的函数值。记成$u=f(\vec{x})=f(x_1,x_2,...,x_n)\quad(\vec{x}\in\Omega)$.

定义11.2 区域的定义，闭区域的定义。

开区域：非空连通开集。

闭区域：开区域的闭包。

例如，$D=\{(x,y)|a,x<b,c<y<d\}$是R^2上的开区域；$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$是$R^3$上的闭区域。

11.2 多元函数的表示

显式表示的函数：$z=f(x,y)$；

隐函数：用方程$F(x,y,z)=0$表示的函数$z=z(x,y)$；

用参数表示的函数：用参数方程$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(x,y)\end{cases}$，表示的函数$z=z(x,y)$.

三元函数：$u=f(x,y,z)$

11.3常见多元函数的几何意义

$z=f(x,y)$：$\Re^3$中的曲面的显函数表示；

$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(x,y)\end{cases}$：$\Re^3$中的曲面的参数表示；

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$：$\Re^3$ 中的曲线的参数表示。

例如：$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 是空间球面；

$\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\varphi \\ y = R\cos\theta\sin\varphi \\ z = R\sin\theta \end{cases}$ 是空间球面；$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = a\varphi \end{cases}$ 是空间螺旋线。

11.4 多元函数的极限和连续的概念

定义11.3　　R^n 中距离的定义：距离是 $d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{y} - \vec{x}\|$。

定义11.4　　多元函数的极限定义：

设 $f: D \subset R^n \to R$，$a \in R$，$\vec{x}_0 \in R^n$，$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta > 0$，使得

$\forall\vec{x} \in D$，且 $0 < d(\vec{x},\vec{x}_0) < \delta$，都有 $|f(\vec{x}) - a| < \varepsilon$.

定理11.1　　多元函数的极限如果存在，则是唯一的。

定理11.2　　$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}[\alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x})] = \alpha \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) + \beta \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x})$

定理11.3　　$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = A$：　$f(\vec{x}) = A + o(1)$，　当 $\vec{x} \to \vec{x}_0$

- **多样性**：自变量变化趋势的多样性，引起多元函数极限形式的多样性

例11.1　　求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

【解】　$\left|\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le 2|x| \quad \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

例11.2　　求 $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

【解】　$\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$

例11.3　　求 $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

【解】$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{x}{x+y}}=e$

例11.4　设 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$ $((x,y)\neq(0,0))$，研究极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)$ 的存在性.

【解】　对于任意的 $(x,y)\neq(0,0)$，有 $0<x^2+y^2\leq(|x|+|y|)^2$． 所以

$$0\leq|f(x,y)-0|=\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\leq|x|+|y|\leq0$$

因此由极限定义得到 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)=0$ ．

例11.5　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$（不存在）；$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$（不存在）

【解】沿 $y=kx$ 趋于零，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$

不同的 k 值，即限不同，故极限不存在。

沿 $y=kx^2$ 趋于零，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^4}{(1+k^2)x^4}=\dfrac{k}{1+k^2}$

不同的 k 值，即限不同，故极限不存在。

例11.6　设 $f(x,y)=\begin{cases}1, & if\ \ y=x^2\\ 0, & if\ \ y\neq x^2\end{cases}$，研究极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)$ 的存在性.

【解】　显然有：当 (x,y) 沿 x 轴或者 y 轴趋向于原点 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 趋向于零，而且当 (x,y) 沿从原点出发的任意一条射线趋向于原点时，都有 $f(x,y)$ 趋向于零． 即 $\forall a,b\in R,\ \lim\limits_{t\to0}f(at,bt)=0$；但是，当 (x,y) 沿抛物线 $y=x^2(x>0)$ 从原点趋向于原点时，有 $\lim\limits_{x\to0}f(x,x^2)=\lim\limits_{x\to0}1=1\neq0$． 证明了极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)$ 不存在.

- 上面的例子说明，多元函数的极限问题要比一元函数的情形复杂得多. 必须要考察动点 (x,y) 以各种不同方式趋向于定点 (x_0,y_0) 时，函数的变化趋势.
- 当 $\vec{x}$ 沿两条不同的路径趋于 $\vec{x}_0$ 时，函数有两个不同的极限，则函数的极限不存在

- 累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$ 与重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$

例11.7　$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\cdot y\neq 0\\ 0, & x\cdot y=0\end{cases}$

两个二次极限都不存在，但二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

例11.8　$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

【解】$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$，而二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

- 重极限与累次极限没有关系

定理11.4　重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 均存在，则有 ：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 均存在但不等，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在

定义11.5 连续： $f(x)$ 在 $\vec{x}_0$ 点连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})=f(\vec{x}_0)$

定理11.5 $f(\vec{x})$ 在 $\vec{x}_0$ 点连续 $\Leftrightarrow f(\vec{x})=f(\vec{x}_0)+o(1)$，当 $\vec{x}\to\vec{x}_0$

例11.9　考察函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 的连续性.

【解】在 (x_0,y_0) 点，若 $x_0\neq 0$，函数连续;

若 $x_0=0$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=y_0$

当 $y_0\neq 0$ 时，不连续 ；　　　　当 $y_0=0$ 时，连续

定理11.6 连续函数的运算性质：

（1）四则运算的连续性：如果 $f,g\in C(\Omega)$，那么对于任意的常数 α,β，

函数 $\alpha f+\beta g\in C(\Omega)$；$f\cdot g\in C(\Omega)$；$g\neq 0$ 的点处，$f/g\in C(\Omega)$

（2）复合运算：设函数 $u(x,y),v(x,y)$ 都在区域 Ω 上连续，函数 $f(u,v)$ 在区域 Ω_1 上连续，

并且当$(x,y)\in\Omega$时有$(u(x,y),v(x,y))\in\Omega_1$，则复合函数$f(u(x,y),v(x,y))$也在$\Omega$上连续.

（3）多元初等函数在它们的定义区域内部是处处连续的。

11.5 有界闭区域上多元连续函数的性质

定理11.7 有界闭区域上多元连续函数的最大最小值定理 设$\Omega\subseteq R^n$ 是有界闭区域，$f\in C(\Omega)$，则 f Ω 上有界．且存在 $P_1\in\Omega,P_2\in\Omega$，使得 $f(P_1)=\min\limits_{P\in\Omega} f(P)$，$f(P_2)=\max\limits_{P\in\Omega} f(P)$.

定理11.8 有界闭区域上多元连续函数的介值定理 设$\Omega\subseteq R^n$是有界闭区域(连通的)，$f\in C(\Omega)$. 则对介于$m=\min\limits_{P\in\Omega} f(P)$和$M=\max\limits_{P\in\Omega} f(P)$之间的每个实数$\mu$，都存在$P\in\Omega$，满足$f(P)=\mu$.

定理11.9 推论：零点定理：设$\Omega\subseteq R^n$是连通域，$f\in C(\Omega)$. 若存在两点，$P,Q\in\Omega$，使得$f(P)\cdot f(Q)\le 0$，则存在$P_\xi\in\Omega$，$f(P_\xi)=0$；

特别是，当Ω为凸集（即：$\forall P,Q\in\Omega\Rightarrow \overline{PQ}\subset\Omega$）时，则存在$P_\xi\in\overline{PQ}\subset\Omega$，$f(P_\xi)=0$

例 11.10. $f(\vec{x})$在R^n上连续，且（1）$\vec{x}\ne 0$时，$f(\vec{x})>0$；（2）$\forall c>0,\ f(c\vec{x})=cf(\vec{x})$

证明：存在$a>0,b>0$，使$a\|\vec{x}\|\le f(\vec{x})\le b\|\vec{x}\|$.

【证明】 $f\left(\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)$有界. $a\le f\left(\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)\le b$

例 11.11. 若$z=f(x,y)$在R^2上连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} f(x,y)=+\infty$，证明 函数$f$在$R^2$上一定有最小值点。

【证明】任取$P\in R^2$，设$f(P)=M$；

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} f(x,y)=+\infty\Rightarrow\exists d>0,\forall\rho=\sqrt{u^2+v^2}>d: f(u,v)>M$；

存在$Q\in B=\{(x,y)|x^2+y^2\le d^2\}$：$f(Q)=\min\limits_{(x,y)\in B} f(x,y)$.

显然，$f(Q)=\min\limits_{(x,y)\in R^2} f(x,y)$。

11.6 多元函数偏导数和全微分

定义11.6　$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

记号：$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$，或 $f_x'(x_0,y_0)$；$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$，或 $f_y'(x_0,y_0)$

例11.12. $z=\dfrac{y}{x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}$；　$\dfrac{\partial y}{\partial x}=z$，　$\dfrac{\partial x}{\partial z}=-\dfrac{y}{z^2}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{x}\cdot z\cdot\left(\frac{-y}{z^2}\right)=-1$$

11.6 全微分存在的必要条件和充分条件

定义11.7　若 f 在 $U_\delta(P_0)\subset D$ 有定义，且存在不依赖 $\Delta x,\Delta y$ 的 A,B，使多元函数在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的增量

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\ \Delta=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则称 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点可微，并称线性函数 $A\Delta x+B\Delta y$ 为在点的全微分，记成　$df(x_0,y_0)=Adx+Bdy$

- 必要条件：可微，偏导数必存在。

证明：$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$；

$$\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\frac{A\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}\xrightarrow{\Delta x\to 0}A;$$

$$\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\frac{B\Delta y+o(\Delta y)}{\Delta y}\xrightarrow{\Delta y\to 0}B$$

- 充分条件：$f_x'(x,y)$ 和 $f_y'(x,y)$ 连续。

【证明】$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$

$$=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

$$=f_y'(x_0+\Delta x,y_0+\theta_1\Delta y)\Delta y+f_x'(x_0,y_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

$$=\left(f_y'(x_0,y_0)+o(1)\right)\Delta y+f_x'(x_0,y_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

$$=\left(f_y'(x_0,y_0)+o(1)\right)\Delta y+f_x'(x_0,y_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

$$=f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y+o(1)\Delta y+o(1)\Delta x\,.$$

$$=f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)$$

因为 $0\le\left|\dfrac{o(\Delta x)+o(1)\Delta y}{\rho}\right|=\dfrac{|o(\Delta x)+o(1)\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\le\left|\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right|+\left|\dfrac{o(1)\Delta y}{\Delta y}\right|\xrightarrow{\Delta x\to0,\Delta y\to0}0$.

例 11.13. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 (0, 0) 点的偏导数为什么？在 (0, 0) 是否可微?

解：$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$

$$f(x,y)-f(0,0)-\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y\right]=o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

函数可微，两个偏导数均为 0.

例 11.14. 讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\ne0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 (0,0) 点的连续性与偏导数的存在性.

答案：不连续，但偏导数存在.

例 11.15. 设 $f(x,y)=(x+y)\varphi(x,y)$ 其中 $\varphi(x,y)$ 在 (0,0) 点连续，则

$$df(x,y)=[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_x(x,y)]dx+[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_y(x,y)]dy$$

令 $x=0,y=0$，$df(0,0)=\varphi(0,0)(dx+dy)$.

(1) 指出错误

(2) 写出正确的解法.

【解】 $\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=(\Delta x+\Delta y)\varphi(\Delta x,\Delta y)$

因为 $\varphi(x,y)$ 在（0，0）处连续，即 $\lim\limits_{\rho\to0}\varphi(\Delta x,\Delta y)=\varphi(0,0)$，其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$。

所以 $\varphi(\Delta x,\Delta y)=\varphi(0,0)+\alpha(\rho)$，其中 $\lim\limits_{\rho\to0}\alpha(r)=0$.

$$\Delta f(0,0)=\varphi(0,0)\Delta x+\varphi(0,0)\Delta y+\alpha(\rho)\Delta x+\alpha(\rho)\Delta y$$

$f(x,y)$ 在（0，0）点处可微。

$$df(x,y)|_{(0,0)}=\varphi(0,0)dx+\varphi(0,0)dy$$

例 11.16. 设 $z(x,y)$ 定义在矩形区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le a,0\le y\le b\}$ 上的函数。证明:

（1） $z(x,y)=f(y)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in D,\dfrac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$ ；

（2） $z(x,y)=f(y)+g(y)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in D,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv 0$

【证明】 (1)$\Rightarrow$: 显然.

$$\Leftarrow:\ z(x,y)-z(x_0,y)=\frac{\partial z}{\partial x}(\xi,y)(x-x_0)=0,$$

$z(x,y)=z(x_0,y)$， $z(x,y)=f(y)$ 与 x 无关.

(2) $\Rightarrow$: 显然.

$$\Leftarrow:\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv 0,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=h(x)\text{ 与 } y \text{ 无关.}$$

$$z(x,y)=\int h(x)dx+g(y)=f(y)+g(y)$$

例 11.17. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微, 且全微分 $df=0$ 的充分条件是（ D ）.

(A) 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数 $f_x'=0,\ f_y'=0$

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$,

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\dfrac{\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

解题思路 用两个条件判断：(1) $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$；

(2) $\dfrac{\Delta f(x_0,y_0)-df(x_0,y_0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\dfrac{\Delta f(x_0,y_0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\xrightarrow{\rho\to 0}0$ (1)

条件(1)都成立，只有 D 中条件(2)成立，故选 D.

例 11.18. 二元函数 $f(x,y)$ 在点（0，0）处可微的一个充分条件是（　C　）。

（A）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$

（B）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$

（C）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

（D）$\lim\limits_{x\to0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$，且 $\lim\limits_{y\to0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$

例 11.19. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　C　）

A. 连续且偏导数存在　　　B. 不连续但偏导数存在

C. 连续但偏导数不存在　　D. 不连续且偏导数不存在

解题思路 由于当 $x=0$ 或者 $y=0$ 时，$f(x,y)\equiv0$，所以

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x-0}=0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x-0}=0$$

例 11.20 设 $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$，求 dz

例 11.21 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$（　A.　）

$A.\ 0$　　　$B.\ \dfrac{1}{2}$　　　$C.\ 1$　　　$D.$ 不存在

例 11.22 已知 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，试讨论：

(1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性；

(2) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的两个偏导数是否存在；

(3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性。

【解】(1) 首先由不等式：$|f(x,y)-f(0,0)|=|f(xy)|=\sqrt{|xy|}\le\dfrac{x^2+y^2}{2}$。

于是由 $0 \le \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} | f(x,y) - f(0,0) | \le \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{2} = 0$，

得到 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续。

(2) 由于 $\dfrac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{|x\cdot 0|}}{x} = 0$ 可知 $\sqrt{|xy|}$ 在 (0, 0) 处的对 x 的偏导数存在；

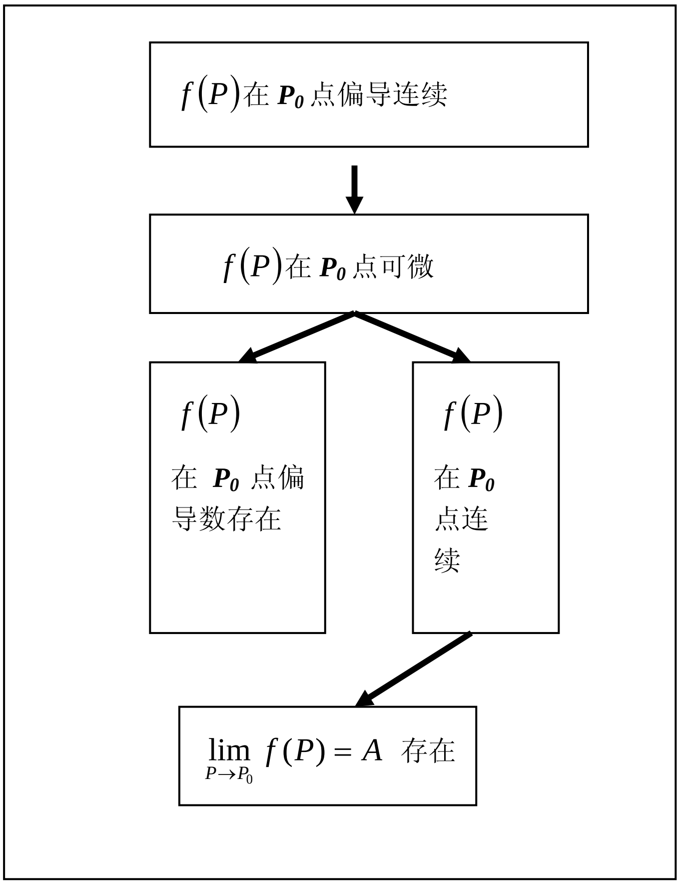
同理，可以证明他在 (0, 0) 处的对 y 的偏导数存在。

(3) 假设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则有 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，

$$f(x,y) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)} \cdot y\right) = o(\sqrt{x^2+y^2})\text{。}$$

但是，如果设 $x = y$，并令 $x \to 0$，有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$。矛盾。

于是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微。



11.7 多元复合函数、隐函数的求导法

(1) 多元复合函数

定理11.10 设二元函数 $z=f(u,v)$ 在点 (u_0,v_0) 处偏导数连续，二元函数

$u=u(x,y),v=v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数连续，并且

$u_0=u(x_0,y_0),v_0=v(x_0,y_0)$，

则复合函数 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}+\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}$$

例 11.23 已知 $y=\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

【解】考虑二元函数 $y=u^v$，$u=\frac{1}{x},v=-\frac{1}{x}$，应用推论得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx}.\ vu^{v-1}\frac{-1}{x^2}+(\ln u)u^v\frac{1}{x^2}=\left(\frac{1}{x}\right)^{2-\frac{1}{x}}(1-\ln x).$$

例 11.24 设 $z=f(xy,\frac{x}{y})$，f 二阶连续可微，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【解】 记 $u=xy,v=\frac{x}{y}$； $f_1'=\frac{\partial f}{\partial u},f_2'=\frac{\partial f}{\partial v}$，

$$f_{11}''=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2},f_{22}''=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},\quad f_{12}''=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v},f_{21}''=\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$$

则 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=y f_1'+\frac{1}{y}f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=y\frac{\partial f_1'}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial f_2'}{\partial x},$$

因为 $f_1'=\frac{\partial f}{\partial u},f_2'=\frac{\partial f}{\partial v}$ 都是以 u,v 为中间变量，以 x,y 为自变量的函数；所以 $\frac{\partial f_1'}{\partial x}=f_{11}''\frac{\partial u}{\partial x}+f_{12}''\frac{\partial v}{\partial x}=y f_{11}''+\frac{1}{y}f_{12}''$

$$\frac{\partial f_2'}{\partial x}=f_{21}''\frac{\partial u}{\partial x}+f_{22}''\frac{\partial v}{\partial x}=y\,f_{21}''+\frac{1}{y}f_{22}''$$

将以上两式代入前式得： $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2 f''_{11}+2f''_{12}+\dfrac{1}{y^2}f''_{22}$.

注意：(1) $f_1'=\dfrac{\partial f}{\partial u},f_2'=\dfrac{\partial f}{\partial v}$ 都是以 u,v 为中间变量，以 x,y 为自变量的函数；

(2) 记号 $f_1'=\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u},f_2'=\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}$ 的规定与使用。

例 11.25 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数， $z=f(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y})$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________。

例 11.26 设 $u=f(x,y),x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$， f 可微，证明：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

例 11.27 设 f 可微，求偏导数： $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$

(2)隐函数

定义11.8 　设 F 是一个二元函数，对于方程 $F(x,y)=0$，如果在区间 (a,b) 中的所有的 x，都存在唯一的 y，使得 (x,y) 满足上述方程，即 $F(x,f(x))\equiv 0\ (\forall x\in(a,b))$. 则称由方程 $F(x,y)=0$ 确定了 (a,b) 上的一个**隐函数** $y=f(x)$。

例如考察圆周 C： $x^2+y^2=1$，显然，整个圆周既不能表示为 $y=f(x)$，也不能表示为 $x=x(y)$. 但是在点 $(0,1)$ 的某个邻域中的那部分曲线可以表示为 $y=\sqrt{1-x^2}$ ；在点 $(1,0)$ 的某个邻域中的那部分曲线可以表示为 $x=\sqrt{1-y^2}$.

定理11.11 　隐函数存在性定理：设 $F(x,y)$ 是 $C^{(1)}$ 类函数，即 $F(x,y)$ 的两个偏导数都连续， $F(x_0,y_0)=0$， $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$，则存在 $\eta,\delta>0$，使得 $\forall x\in(x_0-\eta,x_0+\eta)$，存在唯一的 $y\in(y_0-\delta,y_0+\delta)$ 满足 $F(x,y)=0$。这样定义的隐函数 $y=y(x)$ 连续可微，且 $y'(x)=-\dfrac{F_x'(x,y(x))}{F_y'(x,y(x))}$。

- 隐函数的另一种求导法：若函数 $y=y(x)$，由方程 $F(x,y)=0$ 确定，求导之函数？

按隐函数定义有恒等式：

$$F(x,y(x))\equiv 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}F(x,y(x))=0,$$

$$\Rightarrow F'_x(x,y(x))+F'_y(x,y(x))\cdot y'(x)=0 \Rightarrow y'(x)=-\frac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))}。$$

从这是可见：函数 $y=y(x)$ 可导有一个必要条件是，$F'_y(x,y)\neq 0$.

例 11. 28 已知函数 $y=f(x)$ 由方程 $ax+by=f\left(x^2+y^2\right), a,b$ 是常数，求导函数。

【解】方程 $ax+by=f\left(x^2+y^2\right)$ 两边对 x 求导，

$$a+b\frac{dy}{dx}=f'(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xf'(x^2+y^2)-a}{b-2yf'(x^2+y^2)}$$

一般来说，若函数 $y=y(\vec{x})$，由方程 $F(\vec{x},y)=0$ 确定，求导之函数？

将 y 看作是 $x_1,\ldots,x_n$ 的函数 $y=y(\vec{x})=y(x_1,\ldots,x_n)$，对于方程

$$F(x_1,\ldots,x_n,y(x_1,\ldots,x_n))=0$$

两端分别关于 x_i 求偏导数得到，并解 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$，可得到公式：$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F'_{x_i}(\vec{x},y)}{F'_y(\vec{x},y)}$

例 11. 29 设函数 $x=x(z),\ y=y(z)$ 由方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-1=0\\ x^2+2y^2-z^2-1=0\end{cases}$ 确定，　求

$\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$.

【解】 $\begin{cases}x^2+y^2=-z^2+1\\ x^2+2y^2=z^2+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x\frac{dz}{dx}+2y\frac{dz}{dy}=-2z\\ 2x\frac{dz}{dx}+4y\frac{dz}{dy}=2z\end{cases}$ 解方程得：

$$\begin{bmatrix}\frac{dx}{dz}\\ \frac{dy}{dz}\end{bmatrix}=-\frac{1}{4xy}\begin{bmatrix}4y & -2y\\ -2x & 2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2z\\ -2z\end{bmatrix}=-\frac{1}{4xy}\begin{bmatrix}12yz\\ -8xz\end{bmatrix}$$

由此得到　$\frac{dx}{dz}=\frac{3z}{x},\frac{dy}{dz}=-\frac{2z}{y}$.

例 11.30 已知函数 $z=z(x,y)$ 由参数方程：$\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=uv \end{cases}$，给定，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

【解】　这个问题涉及到复合函数微分法与隐函数微分法．x,y 是自变量，u,v 是中间变量（u,v 是 x,y 的函数），　先由 $z=uv$ 得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}$$

u,v 是由方程 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 的 x,y 的隐函数，在这两个等式两端分别关于 x,y 求偏导数，

得 $\begin{cases} 1=\cos v\dfrac{\partial u}{\partial x}-u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0=\sin v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$，$\begin{cases} 0=\cos v\dfrac{\partial u}{\partial y}-u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 1=\sin v\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$

得到 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos v,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-\sin u}{u},\frac{\partial u}{\partial y}=\sin v,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v}{u}$$

将这个结果代入前面的式子，得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}=v\cos v-\sin v$$

与 $$\frac{\partial z}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}=v\sin v+\cos v$$

例 11.31 隐函数函数 $u=u(x,y)$ 由方程 $\begin{cases} z=f(x,y,z,t) \\ g(y,z,t)=0 \\ h(z,t)=0 \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$

【解】　函数关系分析：　5（变量）– 3（方程)=2(自变量)；

一函（u)，二自（ x， y ），二中（ z， t ）

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial t}{\partial y} \end{pmatrix}=\left(\left|\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right|\right)^{-1}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial t} & -\dfrac{\partial g}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial z} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial g}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}\right)\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}}.$$

例 11.32 设函数 $x=x(z),\ y=y(z)$ 由方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-1=0\\ x^2+2y^2-z^2-1=0\end{cases}$ 确定， 求 $\frac{dx}{dz},\ \frac{dy}{dz}$.

【解】 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-1=0\\ x^2+2y^2-z^2-1=0\end{cases}$，两边对 x 求导，

$$\begin{cases}2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0\\ 2x+4y\frac{dy}{dz}-2z\frac{dz}{dx}=0\end{cases}$$,解线性方程，

得 $$\frac{dx}{dz}=\frac{3z}{x},\frac{dy}{dz}=-\frac{2z}{y}$$

11.8 二阶偏导数：

例 11.33 求 $f(x,y,z)=x^{y^z}$ 的二阶偏导

【解】 $\frac{\partial f}{\partial x}=y^z\cdot x^{y^z-1}$，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\left(y^z\right)\cdot x^{y^z-1}+y^z\cdot\frac{\partial}{\partial z}x^{y^z-1}$$

$$=y^z\ln z\cdot x^{y^z-1}+\frac{y^z}{x}x^{y^z}\ln x\cdot y^z\cdot\ln y$$

例 11.34 $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 的二阶偏导是否存在？

【解】当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ 是初等函数，二阶偏导存在；

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$，当 $x^2+y^2\neq 0$ 时

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x}$$，不存在。

例11.35.　$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$，

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=-1,\quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=1$$

定理11.12　若二阶混合偏导数$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$连续，则与求导次序无关，

即：$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

例 11.36 已知$\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$为某个二元函数的全微分, 则$a=$（ D 　　）

$A.-1$　　$B.\ 0$　　$C.\ 1$　　$D.\ 2$

解题思路 令$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，为某个二元函数$f(x,y)$的全微分的必要条件是

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. 可以按照这个条件确定$a$.

例 11.37　$z=z(x,y)$由$x^2+y^2+z^2=a^2$决定，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】$2x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，$2y+2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{xy}{z^3}$$

例11.38 $g(x)=f\left(x,\varphi\left(x^2,x^2\right)\right)$，其中

函数f于φ的二阶偏导数连续，求$\dfrac{d^2 g(x)}{dx^2}$

例 11.39 设$z=f(xy,\dfrac{x}{y})$，f二阶连续可微，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【解】　记　$u=xy,v=\dfrac{x}{y}$；$f_1'=\dfrac{\partial f}{\partial u},f_2'=\dfrac{\partial f}{\partial v}$，

$$f''_{11}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2},\ f''_{22}=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},\ f''_{12}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v},\ f''_{21}=\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$$

则 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=y\,f'_1+\frac{1}{y}f'_2\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=y\frac{\partial f'_1}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial f'_2}{\partial x}$$

因为 $f'_1=\dfrac{\partial f}{\partial u},\ f'_2=\dfrac{\partial f}{\partial v}$ 都是以 u,v 为中间变量，以 x,y 为自变量的函数，所以

$$\frac{\partial f'_1}{\partial x}=f''_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+f''_{12}\frac{\partial v}{\partial x}=y\,f''_{11}+\frac{1}{y}f''_{12}$$

$$\frac{\partial f'_2}{\partial x}=f''_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+f''_{22}\frac{\partial v}{\partial x}=y\,f''_{21}+\frac{1}{y}f''_{22}$$

将以上两式代入前式得： $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2 f''_{11}+2f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22}.$$

11.9 综合例题

例 11.40 设 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微，并且满足方程

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad 若令\begin{cases}u=x+\alpha y\\ v=x+\beta y\end{cases},$$

试确定 α,β 为何值时能变原方程为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

【解】 将 x,y 看成自变量，u,v 看成中间变量，利用链式法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)z$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right)z$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right)z$$

由此可得， $0 = A\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + C\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$

$$=\left(A+2B\alpha+C\alpha^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\left(A+B(\alpha+\beta)+C\alpha\beta\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(A+2B\beta+C\beta^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$$

只要选取 α,β 使得 $\begin{cases} A+2B\alpha+C\alpha^2=0 \\ A+2B\beta+C\beta^2=0 \end{cases}$， 可得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

问题成为方程 $A+2Bt+Ct^2=0$ 有两不同实根，即要求： $B^2-AC>0$.

令 $\alpha=-B+\sqrt{B^2-AC}$，$\beta=-B-\sqrt{B^2-AC}$，即可。

此时，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)=0 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial v}=\varphi(v) \Rightarrow z=\int\varphi(v)dv+f(u)$.

$z=f(u)+g(v)=f(x+\alpha y)+g(x+\beta y)$.

例 11.41 设 $u(x,y)\in C^2$，又 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，

$u(x,2x)=x$，$u_1'(x,2x)=x^2$，求 $u_{11}''(x,2x)$，$u_{12}''(x,2x)$ $u_{yy}''(x,2x)$

【解】 $u_1'(x,2x)=x^2$，两边对 x 求导，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,2x)\cdot 2=2x. \qquad (1)$$

$u(x,2x)=x$， 两边对 x 求导，

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,2x)+\frac{\partial u}{\partial y}(x,2x)\cdot 2=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,2x)=\frac{1-x^2}{2}.$$

两再边对 x 求导，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,2x)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)\cdot 2=-x$. (2)

由已知 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)=0$， (3)

(1), (2), (3) 联立可解得:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)=-\frac{4}{3}x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,2x)=\frac{5}{3}x$$

例 11. 42 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$

其中函数 φ 具有二阶导数 ψ 具有一阶导数，则必有

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$　　[B]

例 11. 43 设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点(0,1,1)的一个邻域，在此邻域内该方程

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.　　[D]

例 11. 44 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $dz\big|_{(1,0)}=$ $\underline{2edx+(e+2)dy}$。

例 11. 45 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-xe^y$ 确定，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\underline{-e}$

【解】当 $x=0$ 时，$y=1$，又方程每一项对 x 求导, $y'=-e^y-xe^yy'$

$y'(1+xe^y)=-e^y$　$y'\big|_{x=0}=-\left.\frac{e^y}{1+xe^y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-e$

例 11. 46 设函数 $f(u)$ 在$(0,+\infty)$内具有二阶导数，

且 $Z=f(\sqrt{x^2+y^2})$　满足等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$。

(Ⅰ) 验证 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$.

(Ⅱ) 若 $f(1)=0,\ f'(1)=1$ 求函数 $f(u)$ 的表达式。.

例 11. 47 设函数 $f(u)$ 可微,且 $f'(0)=\frac{1}{2}$,则 $z=f(4x^2-y^2)$

在点 (1,2) 处的全微分 $dz\big|_{(1,2)}=\underline{4dx-2dy}$。

【解】利用一阶全微分形式不变性直接计算可得

$$dz = f'(u)du = f'(4x^2 - y^2) \cdot d(4x^2 - y^2)$$

$$= f'(4x^2 - y^2) \cdot (8xdx - 2ydy)$$

$$= 2f'(4x^2 - y^2) \cdot (4xdx - ydy)$$

于是 $dz\big|_{(1,2)} = 2f'(0)(4dx - 2dy) = 4dx - 2dy$.

例 11. 48 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0) = 1$，

函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定，

设 $z = f(\ln y - \sin x)$，求 $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=0}, \left.\dfrac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$ 。