基础班微积分第 1 章

预备知识 函数概念 数列极限

1.1 预备知识

1.1.1 实数集的性质

实数连续性的描述：确界公理

任何有界实数集合，必有最小上界和最小下界；但不一定有最大数或最小数。

1.1.2 绝对值

$y=|x|$ 是一种函数表达形式，对任意实数 x 有

$$y=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ 0 & x=0\\ x & x>0\end{cases}，\text{或记为}\quad y=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\ge 0\end{cases}$$

对任意实数 x 与 $a\ge 0$ 有： $|x|\le a \quad\Leftrightarrow\quad -a\le x\le a$，并且，若 $a=0$，

则必有 $x=0$。而 $|x|\ge a \quad\Leftrightarrow\quad x\ge a \quad 或 x\le -a$。

1.1.3 基本不等式

（1）绝对值不等式：$\forall x,y\in R$ 有 $-|x|\le x\le |x|,\quad 0\le x+|x|\le 2|x|$ 且

$$x^2+y^2\le (|x|+|y|)^2 \text{ 或 } \sqrt{x^2+y^2}\le |x|+|y|$$

（2）三角不等式： $\forall x,y\in R$，有 $|x+y|\le |x|+|y|$ 且 $|x-y|\ge \big||x|-|y|\big|$ 。

（3）平均值不等式： $\forall x,y\in R$，有 $\frac{1}{2}(x^2+y^2)\ge xy$

若 $x\ge 0, y\ge 0$，则有 $\frac{1}{2}(x+y)\ge\sqrt{xy}$

例如 $\forall x,y\in R$，可证明：$\sqrt{x^2+y^2}\le |x|+|y|\le\sqrt{2(x^2+y^2)}$。

$$|x|+|y|=\sqrt{x^2+y^2+2|xy|}\le\sqrt{2(x^2+y^2)}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\le |x|+|y|\le\sqrt{2(x^2+y^2)}$$

（4）对任意实数 $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ 有 $\quad \sin x\le x\le \tan x$

(5) 其他不等式：1) $a>b>1\Rightarrow \frac{b}{a}>\frac{b-1}{a-1}$；2) $a\ge -1\Rightarrow (1+a)^n>1+na$，$n$ 为正整数；3）对 $n>m$ 即 $k>0$ 有 $\frac{m}{n}<\frac{m+k}{n+k}$。

对以上不等式在应用中都应广义化，例如

$$\forall x, y \in R，有\ |\sin(x+y)-\cos(x-y)| \le |\sin(x+y)| + |\cos(x-y)|。$$

因为 $\sin(x+y)$ 与 $\cos(x-y)$ 均为实数，由不等式（4）即有本题不等式。

又如 $\forall x, y \in R$ 可证明：$\sqrt{x^2+y^2} \le |x|+|y| \le \sqrt{2(x^2+y^2)}$。

因为 $|x|+|y| = \sqrt{x^2+y^2+2|xy|} \le \sqrt{2(x^2+y^2)}$，所以得到

$$\sqrt{x^2+y^2} \le |x|+|y| \le \sqrt{2(x^2+y^2)}$$

1.1.4 邻域与区间

定义 1. 1 邻域 数轴上的点 x_0 的 δ 邻域是指点集 $N(x_0,\delta)=\{x|\ |x-x_0|<\delta,\delta>0\}$。

邻域内的点是由不等式 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 界定的，包括 x_0 点。

去心邻域 数轴上的点 x_0 的 δ 去心邻域是指点集 $N(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$。

去心邻域与邻域的区别仅在于不包括 x_0 点。

区间:开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b, x\in R\}$。闭区间 $[a,b]=\{x|a\le x\le b, x\in R\}$。

无穷区间常见形式有

$(a,+\infty)=\{x|x>a, x\in R\}$ 与 $[a,+\infty)=\{x|x\ge a, x\in R\}$，

$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in R\}$，与 $(-\infty,b)=\{x|x<b, x\in R\}$，$(a,+\infty]=\{x|x\le b, x\in R\}$，

1．2 函数

函数关系与函数的初等性质对学习数学是重要的基础。函数关系表达了变量之间某种特定的依赖关系，有时可以看作变量之间的对应关系。

定义 1.2 对实数集 X 中的任意 x，按某一确定的规则，若有唯一确定的实数值 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$。

这里，重要的是函数关系 $f(\cdot)$，而记号 x（自变量）与 y（因变量）是人为取定的。实数集 X 应视为使函数关系 $f(\cdot)$ 有意义的全体实数构成的集合，称为 $f(\cdot)$ 的定义域；而对一切由 $f(\cdot)$ 确定的全体实数构成的集合 Y，则称之为 $f(\cdot)$ 的值域。函数关系 $f(\cdot)$ 有时也记为 $f: X\to Y, X\subseteq R$，或 $f: X\to R, X\subseteq R$。

在微积分这门课程里，对一个函数的表达，除了用代数表达式及图表以外，还会有许多

重要的表达方式，比如，一个函数关系可以由方程（隐函数）、（含参数）极限、微分方程、积分、级数等手段来表达。

1.2.1 **函数的初等性质**

掌握函数的初等性质对微积分的学习至关重要。函数的初等性质包括以下几个方面。

(1) **增减性（单调性）**

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 定义域为 X，若 $\forall x_1, x_2 \in X$，当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) \le f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 X 上为增函数（非严格），而当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 X 上为严格单调增函数。

类似可给出单凋减函数的定义。

判断增减性的初等常用方法是减法，当函数在定义域上取得定号（取值不改变正负号）时，也可用除法判断增减性。当然，用导数研究函数的增减性将是一类重要方法。

(2) **奇偶性**

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 在对称的定义域内满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数。而当函数 $y=f(x)$ 在对称的定义域内满足 $f(-x)=-f(x)$ 时，则称 $y=f(x)$ 为奇函数。

广义奇偶性（偶对称与奇对称）

若 $y=f(x)$ 的图形有对称轴 $x=a$，则应有 $f(a-x)=f(a+x)$（将视为参数），

令 $g(x)=f(a-x)$，则有 $g(-x)=f(a+x)=f(a-x)=g(x)$，因此 $g(x)$ 为偶函数。

若 $y=f(x)$ 的图形有对称中心 $(a,0)$，则应有 $f(a-x)=-f(a+x)$（将视为参数），

令 $g(x)=f(a-x)$，则有 $g(-x)=f(a+x)=-f(a-x)=-g(x)$，

因此 $g(x)$ 为奇函数。以上这种性质称为函数 $f(x)$ 的**广义奇偶性或对称性。**

(3) **周期性**

定义 1.5 若存在一个正数 T，使函数 $y=f(x)$ 在定义域内满足 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为周期函数。这里的正数 T 对一个周期函数来说不是唯一的（事实上有无穷多），一般情况下，称其中最小正数称为周期。

(4) **有界性**

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 在 X 上有定义，若存在一个正数 M 使得对任意 $x\in X$ 有 $|f(x)| \le M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 X 上有界。

对函数的有界性，后面还将给出其他情况下的一些描述。这类描述是重要的。

1.2.2 复合函数

函数的常见表达形式包括显函数表达式，隐函数表达式，以及参数表达式。其中核心问题是复合函数的概念。复合函数实质上是一种链锁函数关系。

定义 1.7　设 $X,Y,U\subset R$ ，复合函数关系是指

$$f:U\to Y\text{，即 }y=f(u)\text{，}\quad g:X\to U\text{，即 }u=g(x)$$

这里称 $y=f(g(x))$ 为 x 的复合函数。

一般讲，$u=g(x)$ 的值域为 $y=f(u)$ 定义域的一个非空子集，在特定情况下，$u=g(x)$ 的值域恰为 $y=f(u)$ 的定义域。

例 1.1 证明对任意实数 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，有 $\sin(\sin x)<\sin x$ 。

【证】显然当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，有 $0<\sin x<1<\frac{\pi}{2}$，由不等式（3），即有本题不等式。

例 1.2 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx$，则（ A ）.

（A）$I_1<1<I_2$。（B）$I_1>1>I_2$。（C）$I_1=I_2$。（D）$I_1>I_2>1$.

【解】 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$， $\sin x<x$，且 $\sin x$ 为增函数，于是

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin dx=1\text{。}$$

又因为 $\cos x$ 为减函数，则有

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=1>I_1$。因此 $I_1<1<I_2$，选(A)。

注：许多考生在考试中的失误，大都属于基础知识的不扎实。

1.2.3　隐函数与反函数

定义 1.8　设方程 $F(x,y)=0$ 在平面上某邻域 $N\{(x_0,y_0),\delta\}$ 内满足一定的正则条件（参见多元函数的内容），则可以确定函数关系 $y=y(x)$，使得 $F(x,y(x))\equiv 0$，这时称 $y=y(x)$ 为在某邻域 $N\{(x_0,y_0),\delta\}$ 内由 $F(x,y)=0$ 确定的的隐函数。

$X-Y$ 平面上点 (x_0,y_0) 的 δ 邻域 $N\{(x_0,y_0),\delta\}$ 系指平面点集：

$$N\{(x_0,y_0),\delta\}=\{(x,y)\in R^2\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2,\delta>0\}$$

例如，园的方程 $x^2+y^2-1=0$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上除去两点 $(-1,0)$ 与 $(1,0)$ 之外的

任意点的邻域内均可确定一个单值函数 $y = y(x)$，如在点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 的某邻域内可以确定函数 $y=\sqrt{1-x^2}$, $(|x|<1)$，而在点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 的某邻域内可以确定函数 $y=-\sqrt{1-x^2}$, $(|x|<1)$。

定义 1.9 设函数 $y = f(x)$ 定义域为 X，值域为 Y，若 $\forall y \in Y$ 存在一个函数 $g(y)$ 使得有唯一的点 $x \in X$ 满足 $x = g(y)$，则称 $x = g(y)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数。

注：（1）在某些场合，常把 $y = f(x)$ 的反函数记为 $f^{-1}(x)$ 或 $g(x)$，此时已重新把 x 视为自变量。在反函数记号的使用中，一定要分清是否需要换变量记号。

（2）互为反函数的两个函数曲线关于直线 $y = x$ 对称。

（3） $y = f(x)$ 与其反函数 $g(x)$ 的定义域与值域具有对偶性。即 $y = f(x)$ 的定义域必为 $g(x)$ 的值域，而 $y = f(x)$ 的值域必为 $g(x)$ 的定义域。

（4） $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为为反函数，且有 $f(g(x)) = x$ 与 $g(f(x)) = x$。

1.2.4 参数表达的函数

定义 1.9 若对于参变量 $t \in T$ 的每一个实数值都可由方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in T$$

唯一确定点 (x, y) 与 $t \in T$ 对应，则称该方程为实函数 $y = y(x)$ 或 $x = x(y)$ 的参数方程。

参数方程确定的函数关系实质上一种隐函数关系，只是通过参变量 t 在变量 x, y 之间建立了某种复合函数关系。即 $y = y(t(x))$，其中 $t = t(x)$ 是 $x = x(t)$ 的反函数。

例 1．3 建立函数 $y = x^2$ 的参数方程。

【解】求函数 $y = f(x)$ 的参数表达式，一般可视变量 x 为参数，此时便有非常简捷的结果

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases} \quad x \in X \text{，其参数方程可取为} \begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases} \quad x \in (-\infty,+\infty)\text{。}$$

注：对参数方程，如果进一步满足 $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta) = T, t_1 \neq t_2$ 时，$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$，则参数方程所确定的曲线不相交，此时称该曲线为简单曲线。显然，简单曲线可以是闭合的，换言之，曲线的起点与终点相重合，简称为闭曲线。

例 1.4 求函数 $y=\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{1-e^{2x}}}$ 的定义域。

【解】欲使该函数有意义，自变量必须满足

$1-e^{2x}>0$ 且 $x\neq -1$，由此得定义域为 $x<0$ 且 $x\neq -1$。

例 1.5　设 $f(x)=\begin{cases}\sin x+\phi(x) & x\geq 0\\ -\sin x+\dfrac{1}{2}\phi(x) & x<0\end{cases}$，$\phi(x)=\begin{cases}-1 & x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$，求 $f(x)$ 的表达式。

【解】考虑 $\phi(x)$ 表达式由两段给出，在 $f(x)$ 的表达式中，当 $x\geq 0$ 时，所含须分为两段，即 $0\leq x<1$ 与 $x\geq 1$，而当 $x<0$ 时，自然有 $x<1$，对所含 $\phi(x)$ 只须一段表达式。因此可以得到

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+1 & x\geq 1\\ \sin x-1 & 0\leq x\leq 1\\ -\sin x-\dfrac{1}{2} & x<0\end{cases}$$

例 1.6 求函数 $y=\dfrac{10^{x}-10^{-x}}{10^{x}+10^{-x}}$ 的值域。

【解】直接求该函数的值域不很方便。让我们来考虑其反函数的定义域。

由 $y=\dfrac{10^{2x}-1}{10^{2x}+1}$ 可解出 $10^{2x}=\dfrac{1+y}{1-y}$，$x=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1+y}{1-y}$，

换记号记为 $y=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1+x}{1-x}$，求此函数的定义域。应满足 $\dfrac{1+x}{1-x}>0$，即

$\begin{cases}1+x>0\\ 1-x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1+x<0\\ 1-x<0\end{cases}$ 第二组不等式无解，第一组不等式的解为 $|x|<1$，因此所求函数的值域为 $y\in(-1,1)$。

1.2.5 极坐标方程表达的函数

用极坐标表达一个函数的常用记号是 $\rho=\rho(\varphi),\quad(\varphi_1\leq\varphi\leq\varphi_2,\rho\geq 0)$

极坐标表达的函数相应曲线上的点 (x,y) 与极坐标变量 φ,ρ 之间的关系为

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}\quad(\varphi_1\leq\varphi\leq\varphi_2)$$

例 1.7 建立曲线 $(x-a)^2+y^2=a^2(a>0)$ 与 $x=3$ 的极坐标方程。

【解】将将直角坐标的极坐标式代入曲线方程$\boldsymbol{(x-a)^2+y^2=a^2(a>0)}$，经化简可得

$\rho=2a\cos\varphi,\quad (-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$.

注：事实上，由作图，利用三角函数可立即得到上述结果。

读者可将曲线$x^2+y^2-2ay=0\ (a>0)$转化为极坐标方程$\rho=2a\sin\varphi,\quad (0\le\varphi\le\pi)$。

又如$x=3$的极坐标方程$\rho=\dfrac{3}{\cos\varphi},-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$。

例 1.8 设 $f(x)$ 为连续函数，$\phi(x)$ 为正定偶函数，则 $f(\phi(x))$ 为（　　）。

(A) 奇函数。(B) 偶函数，但未必是定号函数。(C) 正定偶函数。　(D) 不定。

【解】答案为(B)。连续函数以偶函数为中间变量生成的复合函数仍为偶函数。

例 1.10　考察下列函数的奇偶性

(1)　$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

(2)　$y(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$, 其中 $f(x)$ 为奇函数.

(3)　$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$, (奇)

【解】(1)　$\boldsymbol{f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)}$，因此 $\boldsymbol{f(x)}$ 为奇函数。

(2) 只须考察$\boldsymbol{g(x)=\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}}$的奇偶性。

$$\boldsymbol{g(-x)=\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}=\frac{2^x}{2^x+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}=-g(x)},$$

$\boldsymbol{y(x)}$为两个奇函数乘积，必为偶函数。

(3)　显然有 $\boldsymbol{f(-x)=-f(x)}$，因此 $\boldsymbol{f(x)}$ 为奇函数。

例 1.11 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,\infty)$ 上的奇函数. 已知 $f(1)=a,\forall x\in(-\infty,\infty)$ 有

$f(x+2)=f(x)+f(2)$。

(1)　求 $f(5)$；

(2)　若 $f(x)$ 为周期函数, 且周期$T=2$, 求常数$\boldsymbol{a}$。

【解】(1) 令　$\boldsymbol{x=3}$，$\boldsymbol{f(5)=f(3)+f(2)}$。再令　$\boldsymbol{x=-1}$，得到 $\boldsymbol{f(1)=f(-1)+f(2)}$，

又因 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(2)=2f(1)=2a$， $f(3)=f(1)+f(2)=3a$， 于是

$f(5)=3a+2a=5a$.

（2）若 $f(x)$ 为周期函数, 且周期 $T=2$, 则 $f(3)=f(1)$， 则 $3a=a$, $a=0$ 。

例 1.12 若 $y=f(x)$ 的图形有对称轴 $x=a$ 和 $x=b,(a<b)$， 证明 $y=f(x)$ 为周期函数。

【证】由 $y=f(x)$ 的图形有对称轴 $x=a$ 和 $x=b$， 则应有

$f(a-x)=f(a+x)$，（将 x 视为参数）

令 $a-x=t$， 则有 $f(t)=f(2a-t)$，另外又有 $f(b-x)=f(b+x)$，同理可有

$f(t)=f(2b-t)$， 于是得到 $f(2b-t)=f(2a-t)$， 由此令 $2a-t=u$ 可得到

$f(u)=f(u+2(b-a))$， 或记为 $f(x)=f(x+2(b-a))$，注意到 $2(b-a)>0$，

所以 $y=f(x)$ 为周期函数，且周期为 $T=2(b-a)$。

例 1.13 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 则函数 $f(x+\frac{1}{4})+f(x-\frac{1}{4})$ 的定义域是（ ）

(A) $[0,1]$。 (B) $[-\frac{1}{4},\frac{5}{4}]$。 (C) $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$。 (D) $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$。

【解】 答案（D）。用变量置换法，分别考察 $f(x+\frac{1}{4})$ 和 $f(x-\frac{1}{4})$ 的定义域，

求出两个函数的定义域的交集。

例 1.14 $y=\pi+\arctan\frac{x}{2}$ 的反函数是（ ）.

(A) $y=2\tan(x-\pi), x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$ (B) $y=\tan\frac{x}{2}, x\in(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

(C) $y=2\tan\frac{x}{2}, x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ (D) $y=\frac{1}{2}\tan x, x\in(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

【解】 答案（A）。由 $y=\pi+\arctan\frac{x}{2}$ 解出 $x=2\tan(y-\pi)$， 调换 x 和 y 的位置，

变成 $y=2\tan(x-\pi)$， 由对偶性，定义域即为 $y=\pi+\arctan\frac{x}{2}$ 的值域：$(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$。

例 1.15　设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\le 0 \\ x^2+x, & x>0 \end{cases}$，则（　）。

(A) $f(-x)=\begin{cases} -x^2 & , x\le 0 \\ -(x^2+x), & x>0 \end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases} -(x^2+x), & x<0 \\ -x^2, & x\ge 0 \end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases} x^2 & , x\le 0 \\ x^2-x, & x>0 \end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases} x^2-x, & x<0 \\ x^2, & x\ge 0 \end{cases}$

【解】 答案 D。 令$u=-x$，当$x<0$时，由于$u>0$，所以

$$f(-x)=f(u)=u^2+u=x^2-x$$

例 1.16 设 $f:R\to R$ 是单调增函数，且 $\exists k>0,\forall u,v\in R$，满足$|f(u)+f(v)|\le k|u-v|$

证明： $F(x)=f(x)+kx$ 是单调增函数.

【证】$F(x+\Delta x)-F(x)=f(x+\Delta x)+k(x+\Delta x)-(f(x)+kx)$

$$\Delta F(x)=\left(f(x+\Delta x)-f(x)\right)+k(\Delta x),$$

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+k;$$

由$|f(x+\Delta x)-f(x)|\le k|\Delta x|$得到$\left|\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|\le k$

于是 $\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+k\ge 0$

所以 $F(x)$ 是单调增函数。

1.2.6 初等函数

基本初等函数包括以下六类：

（1）常数函数 $\boldsymbol{y=c}$

（2）幂函数 $\boldsymbol{y=x^{\alpha}}$，幂函数的定义域与时常数$\boldsymbol{\alpha}$有关。

（3）指数函数 $\boldsymbol{y=a^x}$ $\boldsymbol{(a>0,a\ne 1)}$，$\boldsymbol{a}$为实常数。

自然指数函数 $\boldsymbol{y=e^x}$

（4）对数函数 $\boldsymbol{y=\log_a x}$ $\boldsymbol{(a>0,a\ne 1)}$，$\boldsymbol{a}$为实常数。

自然对数函数 $\boldsymbol{y=\ln x}$

（5）三角函数　$y=\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$

（6）反三角函数　$y=\arcsin x, \arccos x, \arctan x$

对以上六类基本初等函数，应熟练掌握他们的定义域与值域，初等性质与相应的曲线。

由以上六类基本初等函数，经有限次四则运算或复合运算而生成的函数统称为初等函数。这是微积分课程中重要的研究对象，当然，有时也会涉及到某些非初等函数，包括某些分段函数（分段函数未必都是非初等函数，如 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 可以表达为分段函数，但它又是初等函数）。

1．3　数列的极限概念

1.3.1 定义与概念

掌握好数列极限的概念与方法是顺利学好函数极限的基础，而极限概念方法与分析问题的思想，又是完成本课程后续内容学习的重要支柱与基础。

定义 1.11　对数列$\{x_n\}$，若存在某个常数A，使当n无限变大时，

$|x_n-A|$可以任意小，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$与常数A，使当$n>N$时有

$|x_n-A|<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$当n趋于无穷大时的极限为A，或收敛于A。记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A。$$

特别，若在上述的常数$A=0$，则称$\{x_n\}$是当n趋于无穷大时的无穷小量。

而当上述定义中的A不存在时，称$\{x_n\}$当n趋于无穷大时的极限不存在，或发散。

注：（1）极限等式$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$不同与一般等式，首先是极限存在，

其次才是等于A。

（2）当极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$存在时，$\{x_n\}$中满足不等式$|x_n-A|<\varepsilon$的$x_n$有无穷多项，不满足$|x_n-A|<\varepsilon$的只是有限多项。对极限的存在性，我们关心的是

n足够大时无穷多项的情况，而前端有限项对极限的存在性无关大局。

由此性质，可以推论：　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，且$A>B$，则$\exists N>0$，

使当$n>N$时有　$x_n>y_n$。

证明方法：只要令$a_n=x_n-y_n$　即可完成证明。

定义 1.12 对数列$\{x_n\}$，若当n无限变大时，$|x_n|$也无限变大，即　$\forall G>0$，

$\exists N>0$，使当$n>N$时有$|x_n|>G$，则称$\{x_n\}$是当n趋于无穷大时的

无穷大量。记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$。

特别，当 x_n 在某一项 x_N 之后（$n > N$）取正值无限变大时，则称 $\{x_n\}$ 是当 n 趋于无穷大时的正无穷大量，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$。

此时的描述为 $\forall G > 0$，$\exists N > 0$，使当 $n > N$ 时有 $x_n > G$。

而当 x_n 在某一项 x_N 之后（$n > N$）取负值且 $|x_n|$ 无限变大时，则称 $\{x_n\}$ 是当 n 趋于无穷大时的负无穷大量，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$。

此时的描述为 $\forall G > 0$，$\exists N > 0$，使当 $n > N$ 时有 $x_n < -G$。

例 1.17 数列 $x_n = \dfrac{1+(-1)^n n}{2}$ 为无穷大量，$x_n = \dfrac{1+n}{2}$ 为正无穷大量，$x_n = \dfrac{1-n}{2}$ 为负无穷大量。数列 $x_n = \dfrac{1+n\sin\frac{n\pi}{2}}{2}$ 不为无穷大量，也不收敛。

定义 1.13 对数列 $\{x_n\}$，按下标 n 由小到大取出一列数 $n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots$，并将数列 $\{x_n\}$ 中相应的项构成一个新的数列 $\{x_{n_k} \mid k = 1,2,\cdots\}$，称这一新的数列 $\{x_{n_k}\}$ 为 $\{x_n\}$ 的子列。

定义 1.14 对数列 $\{x_n\}$，若存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$，则称 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷大时无界。此时可描述为：$\forall G > 0$，$\exists N > 0$，使（某个 x_n）满足 $|x_N| > G$。

1．3．2 数列极限的性质

（1） 运算性质

（1）设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$c$ 为实常数，则 $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = cA$（存在）。

（2）设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$。

（3）设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = AB$（存在）。

（4）设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$y_n \neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$（存在）。

（5）设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$，$x_n \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$。

注：（1）只从极限存在的角度来看，上述**运算性质的命题形式均为充分条件，不满足前面条件时，结论不一定不成立。**

（2）利用上述运算性质可以计算某些极限，无穷大量作为极限不存在的一种特例，往往不可进行直接运算，遇到无穷大量时，应设法将无穷大量转化为无穷小量，而无穷小量的运算较为方便。

（2）解析性质

数列极限具有一些重要的解析性质，了解这些性质，对处理极限以及后续内容的学习会有很大帮助。

性质 1 极限的保序性（保号性）

若$\{x_n\}$有极限，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A > 0$，则当$n$足够大时必然有$x_n > 0$，换言之：一定$\exists N > 0$，使当$n > N$时有 $x_n > 0$。又若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A < 0$，则当$n$足够大时必然有$x_n < 0$，换言之：一定$\exists N > 0$，使当$n > N$时有 $x_n < 0$。

证：由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A > 0$，则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，使当$n > N$时有

$A-\varepsilon < x_n < A+\varepsilon$，特别取$\varepsilon = \dfrac{A}{2} > 0$，则$\dfrac{A}{2} < x_n < \dfrac{3A}{2}$，于是有$x_n > \dfrac{A}{2} > 0$。

性质 1 若$\{x_n\}$有极限，且$\exists N > 0$，使当$n > N$时有$x_n > 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \ge 0$。

注：本例题为性质 1 极限的保序性的重要推论。

证：用反证法，假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A < 0$，则由保序性可知：一定$\exists N > 0$，使当$n > N$时有 $x_n < 0$。与题设条件矛盾，于是只能是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \ge 0$。

由性质 1 可进一步推论，即有下述应用结果：（这一结论常称之为极限的比较性质。）

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$与$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$都存在，且$A > B$，则$\exists N > 0$，使当$n > N$时必有 $x_n > y_n$。（证明方法：只要令$a_n = x_n - y_n$，即可完成证明。）

性质 2 唯一性

若$\{x_n\}$有极限，则极限唯一，即若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，又$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$，则只能是$A = B$。

性质 3 有界性

若$\{x_n\}$有极限，则$\{x_n\}$有界（$n\to\infty$）。这种有界性可描述为：若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$存在，则一定$\exists M > 0$ 及 某个$N > 0$，使当$n > N$时有 $|x_n| < M$。

【证】由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$存在，则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，使当$n > N$时有

$A-\varepsilon < x_n < A+\varepsilon$，特别取$\varepsilon = 1 > 0$，则

$A-1 < x_n < A+1$，取$M = \max\{|A-1|, |A+1|\} > 0$，

则当$n > N$时有 $|x_n| < M$ 。

注：掌握了序列极限的保序性概念，便不难理解函数极限的保序性概念，与此相关的知识点还有：由一点处导数正负号导致的函数局部性质，积分的保序性概念与比较性质，函数（一元与多元）的局部极值，梯度与散度概念导致的函数局部性质，等等。

1．3.3 数列极限的存在准则

（1） 单调有界准则

定理 3.1 设$\{x_n\}$为单调增序列，若有上界，即存在常数$M \in R$ 及 某个$N > 0$，使当$n > N$ 时有 $x_n < M$ ，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在。或：单调减有下界，也必有极限。

利用单调有界准则，可以证明下列重要极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

（2）夹逼准则

定理 3.2 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$存在，且$\exists N > 0$，使当$n > N$时有 $a_n \le c_n \le b_n$，则序列$\{c_n\}$ 有极限，且$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$。

做为无穷小量的运算，下述命题常用来处理极限的存在及求解问题

例 1.18　设序列$\{x_n\}$有界，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n$存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$。

【证】序列$\{x_n\}$有界，则存在$\exists N_1$与$M > 0$，使当$n > N_1$时，$|x_n| < M$ 。

由$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，　则$\forall \varepsilon > 0$存在$\exists N_2$，使当$n > N_2$时，$|y_n| < \varepsilon/M$，

取$N = \max\{N_1, N_2\}$，则当$n > N$时，$|x_n y_n| < \varepsilon/M \cdot M = \varepsilon$，

即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$。

1.3.4　无穷大量的比阶

定义 3.5 设x_n与y_n均为无穷大量$(n\to\infty)$，$y_n \ne 0 (n = 1,2,\cdots)$，若满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \mu$$

则（1）当$\mu \ne 0$时，称x_n与y_n为同阶无穷大量$(n\to\infty)$，特别$\mu = 1$时，称x_n与y_n为等价无穷大量$(n\to\infty)$。

（2）当$\mu = 0$时，称x_n是比y_n低阶的无穷大量$(n\to\infty)$，同时称y_n是比x_n高阶的无穷大量$(n\to\infty)$。

（3）当 $\mu=\infty$ 时，称 x_n 是比 y_n 高阶的无穷大量 $(n\to\infty)$，同时称 y_n 是比 x_n 低阶的无穷大量 $(n\to\infty)$。

例 1.19 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$，$(n=2,3,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求出此极限值。

【证】 由归纳法，显然 $\{a_n\}$ 单调增加，再考虑有界性。

$a_2=\sqrt{2+6}<3$，假设 $a_n<3$，则 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}<3$，因此 $\{a_n\}$ 有上界 3，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，记 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$，

由极限的唯一性，对 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$ 取极限得到

$$A=\sqrt{A+6},\quad A_1=-2,\quad A_2=3。$$

再由极限保序性，得到 $A\ge 0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A_2=3$。

例 1.20 设 $a>0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+a^n+a^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}$。

【解】 需对参数 a 分情况讨论。

当 $0<a\le 1$ 时，$1=(a)^{\frac{1}{n}}<\left(a+a^n+a^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}\le(3\cdot a)^{\frac{1}{n}}$，

运用夹逼准则得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+a^n+a^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$。

当 $a>1$ 时，$a^2=\left(a^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}<\left(a+a^n+a^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}<\left(3\cdot a^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}$，

由夹逼准则即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+a^n+a^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}=a^2$。

注：前面用到了下列已知极限（可用极限定义证明）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

其中 a 为任意正的常数。另外还可证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

例 1.21 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(a>0)$，　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

【解】(1) 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(a>0)$：

先设 $0<a<1$，$\forall\varepsilon>0,\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=1-\sqrt[n]{a}\le\varepsilon$，$\sqrt[n]{a}\ge 1-\varepsilon\Rightarrow\dfrac{1}{n}\ln a\ge\ln(1-\varepsilon)$

$$\Rightarrow n\ge\frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}.\ \text{因此，}$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}\right]+1,\quad \forall n\ge N, 0\le 1-\sqrt[n]{a}\le\varepsilon .$$

当 $a\ge 1$时，$\forall\varepsilon>0,\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=\sqrt[n]{a}-1\le\varepsilon$，$\sqrt[n]{a}\le 1+\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{n}\ln a\le\ln(1+\varepsilon)$

$\Rightarrow n\ge\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$. 因此，

$$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]+1,\quad \forall n\ge N, 0\le\sqrt[n]{a}-1\le\varepsilon .$$

（2）　用夹逼准则证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

设 $0<x_n=\sqrt[n]{n}-1\Rightarrow\sqrt[n]{n}=1+x_n\Rightarrow n=(1+x_n)^n$

$$\Rightarrow n=1+nx_n+\frac{n(n-1)}{2}x_n^2+6\quad>\frac{n(n-1)}{2}x_n^2$$

$$0<x_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}},\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}}\ge\lim_{n\to\infty}x_n\ge 0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

例 1.22 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$, 且存在 N，使当 $n>N$ 时有 $x_n<a_n<y_n$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$（　　）。

(A) 存在且等于零.　(B) 存在但不一定等于零.　(C)一定存在.　(D)不一定存在.

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 的条件不足以保证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 的存在，应选（D）。

[注] 事实上，夹逼准则要求除了 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 的存在的条件以外，还有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。

例 1.23 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k+1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k}$。

【解】记 $a_n=\sum\limits_{k+1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k}=\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+6\ +\dfrac{n}{n^2+n}$，显然有

$$\frac{1}{n^2+n}\cdot\frac{n(1+n)}{2}<a_n<\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(1+n)}{2}=\frac{1+n}{2n}$$

两边取极限，由夹逼准则得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k+1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k}=\dfrac{1}{2}$。

例 1.24 设常数 $\lambda>0$ 且常数 $a>1$，证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\lambda}{a^n}=0$。

【证】这一极限证明方法较多，以下采用单调有界准则证明该极限存在。

然后用极限的唯一性求此极限。记

$x_n=\dfrac{n^{\lambda}}{a^n}$，则 $x_{n+1}=\dfrac{(n+1)^{\lambda}}{a^{n+1}}=\dfrac{1}{a}\cdot\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\lambda}\cdot x_n$，因此

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{a}<1$，由极限的保序性则存 $\exists N>0$，使当 $n>N$ 时有 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$，

或 $x_{n+1}<x_n$，即当 $n>N$ 时，$\{x_n\}$为单调减序列，另外，显然有 $x_n>0$，故有下界。

因此序列$\{x_n\}$有极限，记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\lambda}}{a^n}=A$，再由极限的唯一性可得到

$A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{\lambda}}{a^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a}\cdot\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\lambda}\cdot A=\dfrac{1}{a}\cdot A$，或 $(1-\dfrac{1}{a})A=0$，由 $a>1$，

$1-\dfrac{1}{a}\neq 0$，于是得到 $A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\lambda}}{a^n}=0$。

例 1.25 设 $a>0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$。

【证】记 $x_n=\dfrac{a^n}{n!}$，则 $x_{n+1}=\dfrac{a}{n+1}\cdot x_n$。

（1）设 $a>1$，则当 $n+1>a$ 时必有 $x_{n+1}<x_n$，

即序列$\{x_n\}$从第$[a]$项开始单调减少，且 $x_n>0$，即有下界，

于是极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存在，对 $x_{n+1}=\dfrac{a}{n+1}\cdot x_n$，令 $n\to\infty$，

则得到 $A=0\cdot A$，因此 $A=0$。

（2）若 $0<a\le 1$，则对任意 n 必有 $x_{n+1}<x_n$，即序列$\{x_n\}$单调减。

其余同（1）。

例 1.26　证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$。

【证】注意到　$0<\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}6\dfrac{n}{n}<\dfrac{1}{n}$，由夹逼准则，

令 $n\to\infty$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$。

例 1.27　证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$。

【证】由复合极限运算准则，利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$（可用极限定义证明），便有

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{n}=\ln 1=0$。

或由 $0\le\dfrac{\ln n}{n}\le\dfrac{\sqrt{n}}{n}$ 利用夹逼准则得出结论。

前面例题结论，均可直接引用。按上述无穷大量比阶的定义，我们可以将一些常见无穷大量由底阶到高阶进行如下排序：

$$\ln n,\quad n^{\lambda}(\lambda>0),\quad a^{n}(a>1),\quad n!,\quad n^{n}$$

例 1.28 设 $a_1=a>1$，a 为常数，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{a_1}{a_n})$，$(n=1,2,6\ )$，证明极限

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求此极限。

【解】思路是运用单调有界准则。给出的递推表达式含有两项和，启示我们可试验平均值不等式。

由平均值不等式得到：$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{a_1}{a_n})\ge\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a_n\cdot\dfrac{a_1}{a_n}}=\sqrt{a}>1$，

a_n 有下界，只须再证单调减。注意上述结果对一切 n 成立，于是

$$a_{n+1}\le\frac{1}{2}(a_n+\frac{a_n^2}{a_n})=a_n\quad(n=1,2,6\ )$$

即 a_n 单调减有下界，必有极限。记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，

由极限的唯一性，可得方程 $A=\dfrac{1}{2}\left(A+\dfrac{a}{A}\right)$，解此方程得到

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A=\sqrt{a}$（由极限的保序性，应有 $A>0$，因此舍弃负根）。

例 1.29　计算下列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+6\ +n}{n^2}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+2n-3}-\sqrt{2n^2+n}\right)$

【解】（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+6\ +n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{n(1+n)}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+1\right)=\dfrac{1}{2}(0+1)=\dfrac{1}{2}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+2n-3}-\sqrt{2n^2+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-3}{\sqrt{2n^2+2n-3}+\sqrt{2n^2+n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{3}{n}}{\sqrt{2+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n}}+\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

注：掌握了序列极限的保序性概念，便不难理解函数极限的保序性概念，与此相关的知识点还有：由一点处导数正负号导致的函数局部性质，积分的保序性概念与比较性质，函数（一元与多元）的局部极值，梯度与散度概念导致的函数局部性质，等等。

例 1.30　$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=?$

【解】　$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)=\dfrac{1}{2}$

例 1.31（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=?$　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=?$

【解】（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\pi\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)=0.$$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

例 1.31　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+6\ +\dfrac{1}{n}}=?$

【解】$1\le\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+6\ +\dfrac{1}{n}}\le\sqrt[n]{n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+6\ +\dfrac{1}{n}}=1$

例 1.32　证明数列 $x_n=\dfrac{1+n\sin\dfrac{n\pi}{2}}{2}$ 不为无穷大量，但它却是无界的数列。

证：取 $n=2k-1$ 可得到 $\{x_n\}$ 的一个子列

$$x_{2k-1}=\frac{1+(2k-1)\sin(2k-1)\dfrac{\pi}{2}}{2}=\frac{1+(-1)^{k-1}(2k-1)}{2}，（k=1,2,6\ ）$$

显然有　$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=\infty$，因此 $\{x_n\}$ 无界。

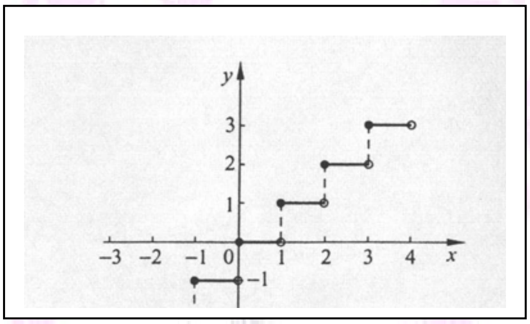
取 $n=2k$ 可得到 $\{x_n\}$ 的又一子列　$x_{2k}=\dfrac{1+2k\sin k\pi}{2}=\dfrac{1}{2}$，（$k=1,2,6$　）

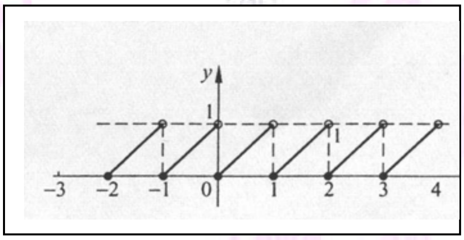
因而$\{x_n\}$不可能是无穷大量。

例 1.33 符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$，是一个常用分段等函数。

例 1.34 阶越函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$，是一个常用分段等函数。

例 1.35 取整函数 $f(x)=[x]=\begin{cases}n, & n\le x<n+1\\ n+1, & n+1\le x<n+2\end{cases}$，也是一个常用分段函数。示意图如下：





例 1.36 函数 $f(x)=x-[x]$又是一个常用分段函数，且为一个周期函数，周期为 1。例如，在$[0,2)$内有

$$f(x)=x-[x]=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ x-1, & 1\le x<2\end{cases}，\quad 示意图如上。$$