

目 录

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续 1

题型归纳与精讲 1

题型 1 函数奇偶性的判别 1

题型 2 函数有界性的判别 1

题型 3 求复合函数表达式 2

题型 4 已知数列的前几项数值及通项的表达式,
求数列的极限 2

题型 5 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限 3

题型 6 求 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项乘积的极限 4

题型 7 通项为积分形式的数列的极限 4

题型 8 求 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限 5

题型 9 求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限 5

题型 10 求 $\infty - \infty$ 型未定式的极限 6

题型 11 求 $0 \cdot \infty$ 型未定式的极限 6

题型 12 求 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型未定式的极限 7

题型 13 无穷小量的比较 8

题型 14 极限式中常数值的确 定 8

题型 15 函数连续性的讨论(重点) 9

题型 16 确定函数的间断点及其类型 9

题型 17 分段函数式中参数的确定(重点)
..... 10

阶梯化训练题 11

基础能力题 11

综合提高题 13

参考答案 15

题型演练答案 15

基础能力题答案 18

综合提高题答案 22

第二章 导数与微分 29

题型归纳与精讲 29

题型 1 求函数在某点处的导数 29

题型 2 求函数方程 29

题型 3 求复合函数的导数 30

题型 4 求参数方程所确定的函数的导数 31

题型 5 隐函数求微分 31

题型 6 分段函数求导 32

题型 7 高阶导数的计算 33

阶梯化训练题 34

基础能力题 34

综合提高题 36

参考答案 37

题型演练答案 37

基础能力题答案 38

综合提高题答案 42

第三章 不定积分 46

题型归纳与精讲 46

题型 1 分式有理函数的积分 46

题型 2 简单无理函数的积分 46

题型 3 三角有理式的积分 47

阶梯化训练题 48

基础能力题 48

综合提高题 49

参考答案 50

题型演练答案 50

基础能力题答案 51

综合提高题答案 53

第四章 定积分 59

题型归纳与精讲 59

题型 1 含变上限积分的题型求解 59

题型 2 含有绝对值符号的定积分的计算 60

题型 3 含奇偶函数与周期函数的定积分计算

.....	60
题型 4 含三角有理式的定积分计算.....	61
题型 5 分母为两项, 而分子为分母中其中一项的积分.....	61
题型 6 含定积分等式的证明.....	62
题型 7 定积分不等式的证明.....	63
题型 8 反常积分的计算.....	65
阶梯化训练题	66
基础能力题	66
综合提高题	67
参考答案	69
题型演练答案	69
基础能力题答案	71
综合提高题答案	73
第五章 中值定理	80
题型归纳与精讲	80
题型 1 结论为 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 的命题的证明	80
题型 2 含 $f^{(n)}(\xi)$ 等式的证明	81
题型 3 区间 (a, b) 内 $\exists \xi, \eta$ 满足某种关系式的命题的证明.....	82
阶梯化训练题	83
基础能力题	83
综合提高题	83
参考答案	85
题型演练答案	85
基础能力题答案	86
综合提高题答案	87
第六章 一元微积分的应用	92
题型归纳与精讲	92
题型 1 函数不等式的证明.....	92
题型 2 求函数的极值与最值.....	93
题型 3 关于方程根的讨论.....	93
题型 4 函数图形在区间 I 上凹凸性的判别	95
题型 5 渐近线的计算.....	95
题型 6 求平面图形的面积.....	96
题型 7 求立体体积.....	97

阶梯化训练题	98
基础能力题	98
综合提高题	100
参考答案	101
题型演练答案	101
基础能力题答案	104
综合提高题答案	107
第七章* 向量代数与空间解析几何	115
题型归纳与精讲	115
题型 1 向量的运算	115
题型 2 求平面方程	116
题型 3 求空间直线方程	116
题型 4 平面与平面、平面与直线、直线与直线的关系	117
题型 5 线性代数中线性相关性在解析几何中的应用	118
题型 6 投影线方程	119
题型 7 旋转面方程	119
阶梯化训练题	120
基础能力题	120
综合提高题	121
参考答案	121
题型演练答案	121
基础能力题答案	124
综合提高题答案	124
第八章 多元函数微分学	128
题型归纳与精讲	128
题型 1 讨论极限的存在性	128
题型 2 讨论可导函数的可微性	128
题型 3 求抽象的复合函数的偏导数	129
题型 4 隐函数方程组求微分	130
题型 5 多元函数微分学在几何中的应用	131
题型 6 多元微分学的有关证明题	132
题型 7 多元函数的极值	133
阶梯化训练题	134
基础能力题	134

综合提高题	134
参考答案	135
题型演练答案	135
基础能力题答案	137
综合提高题答案	138
第九章 重积分	143
题型归纳与精讲	143
题型 1 更换积分次序	143
题型 2 积分域为圆环或扇域的二重积分	143
题型 3 分段函数的二重积分	144
题型 4* 三重积分的计算	144
阶梯化训练题	146
基础能力题	146
综合提高题	148
参考答案	149
题型演练答案	149
基础能力题答案	151
综合提高题答案	154
第十章* 曲线曲面积分	159
题型归纳与精讲	159
题型 1 对弧长的曲线积分的计算	159
题型 2 对坐标的曲线积分计算(重点)	160
题型 3 对面积的曲面积分计算	162
题型 4 对坐标系的曲面积分计算	163
题型 5 曲面面积的计算	165
题型 6 场论的相关计算	166
阶梯化训练题	167
基础能力题	167
综合提高题	168
参考答案	169
题型演练答案	169
基础能力题答案	172
综合提高题答案	174
第十一章* 无穷级数	179
题型归纳与精讲	179
题型 1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq 0)$ 的判敛	179

题型 2 任意项级数收敛性的判断	180
题型 3 有关数项级数的命题的证明	181
题型 4 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 求收敛域, 幂级数求收敛域、收敛半径 R	182
题型 5 求函数的幂级数展开式	183
题型 6 级数求和	184
题型 7 傅立叶级数	185
阶梯化训练题	187
基础能力题	187
综合提高题	187
参考答案	189
题型演练答案	189
基础能力题答案	191
综合提高题答案	192
第十二章 常微分方程	196
题型归纳与精讲	196
题型 1 一阶微分方程求解	196
题型 2 可降阶的高阶微分方程的求解	197
题型 3 高阶常系数线性微分方程的求解	198
题型 4* 欧拉方程的求解	200
题型 5 微分方程在几何和力学中的应用	201
阶梯化训练题	202
基础能力题	202
综合提高题	203
参考答案	204
题型演练答案	204
基础能力题答案	206
综合提高题答案	209

第二篇 线性代数 章三篇

第一章 行列式	215
题型归纳与精讲	216
题型 1 确定用行列式表示的多项式 $f(x)$ 中, 关于 x 的最高次数及 x 的各次幂前的系数	216

题型 2 3~5 阶行列式的计算	216	相关命题	250
题型 3 证明抽象行列式等于零	217	题型 5* 求过渡矩阵与向量的坐标	251
题型 4 n 阶行列式的计算	218	题型 6* 有关正交矩阵命题的证明	252
阶梯化训练题	219	阶梯化训练题	252
基础能力题	219	基础能力题	252
综合提高题	221	综合提高题	254
参考答案	222	参考答案	254
题型演练答案	222	题型演练答案	254
基础能力题答案	223	基础能力题答案	256
综合提高题答案	226	综合提高题答案	258
第二章 矩阵	229	第四章 线性方程组	261
题型归纳与精讲	229	题型归纳与精讲	261
题型 1 关于矩阵的基本性质及初等变换的命题	229	题型 1 含有参数的线性方程组解的讨论	261
题型 2 有关 $\alpha^T \alpha$ 与 $\alpha \alpha^T$ 命题的求解与论证	230	题型 2 有关基础解系的命题证明	262
题型 3 求 n 阶方阵 A 的 k 次幂 A^k	231	题型 3 涉及两个方程组 <u>解之间</u> 关系的命题的讨 论	263
题型 4 求满秩矩阵的逆矩阵	232	阶梯化训练题	264
题型 5 求解矩阵方程	233	基础能力题	264
题型 6 关于矩阵 A 存在逆矩阵的证明	234	综合提高题	267
题型 7 与方阵 A 的伴随矩阵 A^* 有关的命题的 计算与证明	234	参考答案	269
题型 8 矩阵秩的求法及有关矩阵秩的等式与不 等式的证明	236	题型演练答案	269
阶梯化训练题	237	基础能力题答案	270
基础能力题	237	综合提高题答案	274
综合提高题	238	第五章 矩阵的特征值与特征向量	279
参考答案	239	题型归纳与精讲	280
题型演练答案	239	题型 1 特征值的计算与相关证明	280
基础能力题答案	242	题型 2 矩阵 $(kE - A)$ 是否可逆的证明	281
综合提高题答案	244	题型 3 矩阵相似的证明	281
第三章 向量	247	题型 4 已知 $P^{-1}AP = \Lambda$ 中两者求第三者	282
题型归纳与精讲	247	阶梯化训练题	283
题型 1 有关向量的概念及其性质的命题	247	基础能力题	283
题型 2 有关线性表出判别的命题	248	综合提高题	285
题型 3 向量线性相关性的证明	249	参考答案	286
题型 4 向量组的极大线性无关组及向量组秩的	249	题型演练答案	286
		基础能力题答案	288

综合提高题答案	293
第六章 二次型	297
题型归纳与精讲	298
题型 1 有关二次型概念及性质的命题	298
题型 2 将二次型化为标准形	299
题型 3 二次型与其标准形中参数的确定及正交变换	300
题型 4 有关正定矩阵命题的证明	301
阶梯化训练题	302
基础能力题	302
综合提高题	303
参考答案	303
题型演练答案	303
基础能力题答案	306
综合提高题答案	308

第三篇* 概率论与数理统计初步

第一章 事件的概率	311
题型归纳与精讲	311
题型 1 利用条件概率与乘法公式概率计算	311
题型 2 利用全概公式和逆概公式(贝叶斯公式)计算概率	312
阶梯化训练题	313
基础能力题	313
综合提高题	314
参考答案	315
题型演练答案	315
基础能力题答案	316
综合提高题答案	317

第二章 随机变量及其分布

题型归纳与精讲	320
题型 1 求一维随机变量的分布函数及分布密度	320
题型 2 求二维随机变量 (X, Y) 的分布函数及其密度	321
题型 3 求一维随机变量函数 $Y = g(X)$ 分布律	

(分布密度)	322
题型 4 求二维随机变量 (X, Y) 函数 $g(X, Y)$ 的分布律(分布密度)	323
阶梯化训练题	325
基础能力题	325
综合提高题	327
参考答案	327
题型演练答案	327
基础能力题答案	328
综合提高题答案	332
第三章 随机变量的数字特征	336
题型归纳与精讲	336
题型 1 求一维随机变量的数字特征	336
题型 2 求一维随机变量函数的数字特征	337
题型 3 求二维随机变量的数字特征	338
题型 4 求二维随机变量 (X, Y) 函数 $Z = g(X, Y)$ 的数字特征	340
题型 5 求多维随机变量的数字特征	340
阶梯化训练题	342
基础能力题	342
综合提高题	342
参考答案	343
题型演练答案	343
基础能力题答案	345
综合提高题答案	346
第四章 大数定律和中心极限定理	350
题型归纳与精讲	350
题型 1 估算随机事件的概率	350
题型 2 试验次数 n 的确定	351
阶梯化训练题	352
基础能力题	352
综合提高题	353
参考答案	354
题型演练答案	354
基础能力题答案	355
综合提高题答案	355

第五章 数理统计初步	358
题型归纳与精讲	358
题型 1 样本容量 n , 样本均值 \bar{X} 及样本方差 S^2 的数字特征和概率的计算	358
题型 2 求抽样分布	360
题型 3 统计量的点估计	360
题型 4 正态总体均值与方差的区间估计	361
题型 5 估计量的相关命题	363
题型 6 一个正态总体均值的假设检验	364
题型 7 一个正态总体方差 $D(X) = \sigma^2$ 的假设检验	365
题型 8 两个正态总体均值的检验	366
阶梯化训练题	368
基础能力题	368
综合提高题	369

参考答案	370
题型演练答案	370
基础能力题答案	372
综合提高题答案	373

第四篇 模拟题及参考答案

数学一模拟试卷(一)及参考答案	377
数学一模拟试卷(二)及参考答案	389
数学二模拟试卷(一)及参考答案	405
数学二模拟试卷(二)及参考答案	416

附录

2007 年硕士研究生入学考试数学试题	
三、四及参考答案	427

注:带 * 篇、章,数二考生不作要求。

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续

命题特点:

函数部分一般和其他考点联合出题,如求函数的表达式;关于函数的性质出单项选择题的可能性较大;极限部分一般出填空题或其他部分联合出题,函数的连续部分一般出单项选择题或计算题.

题型归纳与精讲

题型1 函数奇偶性的判别

方法和规律: 判别函数奇偶性的方法:(1) 主要依据奇偶性的定义.有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数;偶函数之积为偶函数;偶数个奇函数之积为偶函数;一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.(2) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若函数的定义域关于原点不对称,则函数就无奇偶性可言.

典例精析 判别函数的奇偶性:

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 为连续的偶函数.

【分析】 利用变量代换求出 $F(-x)$, 然后比较 $F(x)$ 与 $F(-x)$ 的关系.

【解】 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{\text{令 } t = -u} \int_0^x f(-u)(-du) \xrightarrow{\substack{f(x) \text{ 为} \\ \text{偶函数}}} - \int_0^x f(u) du,$

$$\therefore F(x) + F(-x) = \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f(t) dt = 0,$$

$\therefore F(x)$ 为奇函数.

题型2 函数有界性的判别

方法和规律: 证明或判别函数有界性的思路:(1) 利用有界性定义.(2) 闭区间上连续函数的有界性.(3) 有极限数列必有界.(4) $x \rightarrow x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的充分小邻域中必有界.

**典例精析**

设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (l 为有限数), 试证: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

【分析】本题运用闭区间上的连续函数必有界, 即可得证.

【证】 $\because \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l, \therefore$ 对于取 $\varepsilon = \frac{|l|}{2}, \exists X > a,$

当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - l| < \frac{|l|}{2},$

又 $|f(x) - l| \geq |f(x)| - |l|$, 所以 $|f(x)| - |l| < \frac{|l|}{2},$

即 $|f(x)| < \frac{3}{2}|l|.$

$\because f(x)$ 在 $[a, X]$ 上连续, 由闭区间上连续函数有界性, 可知 $\exists S$, 使 $\forall x \in [a, X]$, 恒有 $|f(x)| < S.$

取 $M = \max\left\{S, \frac{3}{2}|l|\right\}$, 则对 $\forall x \in [a, +\infty)$ 恒有 $|f(x)| \leq M,$

即 函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

※ 题型演练 2 试证 $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x t e^{t^2} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

题型3 求复合函数表达式

方法和规律: 利用函数性质, 可采用代入法, 分析法或图示法等求解.

典例精析

设 $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, 求 $f[f(x)], f\left[\frac{1}{f(x)}\right].$

【分析】本题为初等函数复合, 可采用代入法.

【解】 $f[f(x)] = \frac{1}{1-f^2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1-x^2)^2}} = \frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)},$

$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2} = \frac{f^2(x)}{f^2(x)-1} = \frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2-1} = \frac{1}{x^2(2-x^2)}.$

【评注】如果是初等函数与分段函数的复合, 或两个分段函数的复合, 可采用分析法; 如果是两个分段函数的复合, 可采用图示法.

※ 题型演练 3 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_{n \text{ 次}},$ 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$ 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)].$

题型4 已知数列的前几项数值及通项的表达式, 求数列的极限

方法和规律: 利用单调有界数列必有极限定理求解 (求解程序: ① 判断极限的存在性



单调性, 方法可用数学归纳法或不等式的放缩法; ② 先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后通过解关于 l 的方程, 求得 l 的值, 从而得极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 或者利用数列极限的定义求解 (先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后在通项的两边取极限得出 l 的数值, 再证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性. 此步通常是利用 $|x_n - l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

典例精析

设 $x_1 = 2, x_2 = 2 - \frac{1}{x_1}, \dots, x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【分析】利用数列的单调有界性判断数列极限的存在性, 然后通过解方程求出极限.

【解】先证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性:

$$x_1 = 2 > 1, \text{ 若 } x_n > 1, \text{ 则 } 0 < \frac{1}{x_n} < 1, \text{ 从而 } x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} > 1, \text{ 因此 } x_{n+1} > 1.$$

$$x_2 - x_1 = -\frac{1}{x_1} = -\frac{1}{2} < 0, \text{ 设 } x_n - x_{n-1} < 0, \text{ 那么}$$

$$x_{n+1} - x_n = 2 - \frac{1}{x_n} - 2 + \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} \cdot x_n} < 0,$$

因此 $x_{n+1} < x_n$,

即 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限得

$$l = 2 - \frac{1}{l}, \text{ 即 } l^2 - 2l + 1 = 0, l = 1,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

【评注】该类题目通常是先用数学归纳法证明数列极限的存在性.

※ 题型演练 4 设 $x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{x_1}{1+x_1}, \dots, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

题型 5 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限

方法和规律: 方法有: (1) 特殊级数求和法. (2) 利用幂级数求和法. (3) 利用定积分定义求极限. (4) 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子 $\frac{1}{n}$, 剩余的可用一个通项表示, 则用定积分定义求解数列的极限; 若数列的各项虽可提出一个因子 $\frac{1}{n}$, 而剩余的不能用一个通项表示, 但其各项是按递增或递减排列的, 则用夹逼定理求极限.

典例精析

求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2 + 1}{n}}$.

【分析】本题直接求解比较不便, 利用夹逼定理转换函数形式, 然后利用定积分的定义求解.

$$\text{【解】} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2 + 1}{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2 + 1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n},$$



$$\therefore \frac{i^2}{n^2} \leq \frac{i^2 + 1}{n^2} \leq \frac{(i+1)^2}{n^2},$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2 + 1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}.$$

$$\text{又} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{1 + \frac{(n+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + (n+1)^2} = \arctan x \Big|_0^1 + 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}, \quad \text{故} \quad \text{原极限} = \frac{\pi}{4}.$$

※ 题型演练 5 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

题型 6 求 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项乘积的极限

方法和规律: 解法有: (1) 分子, 分母同乘以一个因子, 使之出现连锁反应; (2) 拆通项、分解因式使之成为两因子乘积形式, 在整个相乘过程中中间项相消, 从而化简为易求极限; (3) 利用夹逼定理; (4) 利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

典例精析 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$

【分析】本题利用夹逼定理即可求解.

【解】

$$\left. \begin{aligned} \because 1 \cdot 3 &< 2^2 \\ 3 \cdot 5 &< 4^2 \\ \dots\dots\dots \\ (2n-1)(2n+1) &< (2n)^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\Rightarrow 1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2 (2n+1) < 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2 \\ &\Rightarrow 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \sqrt{2n+1} < 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \\ &\dots\dots\dots \\ &\Rightarrow 0 < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0, \quad \text{故} \quad \text{由夹逼定理, 原极限} = 0.$$

※ 题型演练 6 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdots \frac{n^3-1}{n^3+1}.$

题型 7 通项为积分形式的数列的极限

方法和规律: 注意: 一般地 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx$, 求解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ 的方法:

(1) 利用不等式放缩法对 $I_n = \int_a^b f_n(x) dx$ 进行估值, 再用夹逼定理求极限. (2) 利用积分中值



定理求极限.

典例精析 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

【分析】本题可利用放缩法对 $I_n = \int_a^b f(x) dx$ 进行估值.

【解】 \because 在 $[0, 1]$ 上, $x^n \geq 0$, 且 $\frac{1}{1+x}$ 连续,

$$\therefore 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+\xi} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n+1},$$

$$\text{其中 } 0 \leq \xi \leq 1, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n+1} = 0.$$

※ 题型演练 7 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

题型 8 求 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限

方法和规律: 求解 $\frac{0}{0}$ 型极限的方法: (1) 通过因式分解或根式有理化消去零因子, 然后用连续函数的性质求极限; (2) 利用等价无穷小和泰勒公式求极限; (3) 利用洛必达法则求极限 (这是求 $\frac{0}{0}$ 型极限最有效的方法); (4) 利用变量替换 (通常是令 $x = \frac{1}{t}$ 或 $x = \frac{1}{t^2}$).

典例精析 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{e^x - 1}$

【分析】本题可利用等价无穷小量的代换求解.

【解】将根式有理化, 于是有

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{(e^x - 1)(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})} \\ &\stackrel{\text{由等价无穷小}}{\underset{\text{代换}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})} = 1. \end{aligned}$$

※ 题型演练 8 求极限: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

题型 9 求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限

方法和规律: 求解 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的方法: (1) 洛毕达法则; (2) 变量替换.

典例精析 求极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^{2x} e^{t^2} dt\right)^2}{\int_{3x}^0 e^{2t^2} dt}$.



【分析】本题可利用洛必达法则求解.

$$\begin{aligned} \text{【解】原极限} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \int_0^{2x} e^{t^2} dt \cdot 2e^{4x^2}}{-3e^{18x^2}} = -\frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{2x} e^{t^2} dt}{e^{14x^2}} \\ &= -\frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{4x^2}}{28xe^{14x^2}} \\ &= -\frac{4}{3} \times \frac{1}{14} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^{10x^2}} = 0. \end{aligned}$$

【评注】求 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限,通常以“抓大头”的办法解决为好(所谓抓大头就是取分子、分母中趋向于 $+\infty$ 最快的项).

※ 题型演练 9 求极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2-x^2} dt}{x}.$

题型 10 求 $\infty - \infty$ 型未定式的极限

方法和规律: 转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$, 再运用洛必达法则求解, 或“抓大头”法求解.

典例精析 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot^2 x).$

【分析】本题可转化为 $\frac{0}{0}$ 型极限.

$$\begin{aligned} \text{【解】原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + x \cos x)}{x} \cdot \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

※ 题型演练 10 求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$

题型 11 求 $0 \cdot \infty$ 型未定式的极限

方法和规律: $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 再用法则求解.

设 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \infty$, 则

$$\lim f(x)g(x) \quad (0 \cdot \infty) = \lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

注意: 一般讲, 对数函数和反三角函数一般不“下放”, 因为下放后的导数比原来的复杂, 违背数学运算的原则.

典例精析 求极限: $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}.$



【分析】本题可换成 $\frac{\infty}{\infty}$ 的形式.

$$\begin{aligned}
 \text{【解】原极限} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{(1-x)^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{2} x} \cdot \frac{\pi}{2}}{(1-x)^{-2}} = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)^2}{\cos^2 \frac{\pi}{2} x} \\
 &= \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(1-x)}{-2 \cos \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi}{2} x \cdot \frac{\pi}{2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sin \pi x} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\pi \cos \pi x} = \frac{2}{\pi}.
 \end{aligned}$$

※ 题型演练 11 求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{1+x} \right)$

题型 12 求 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型未定式的极限

方法和规律: 基本思路是通过数恒等式将其化为 $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$, 再用法则.

关于 1^∞ 型极限有两种求法:

(1) 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (适用于底为 $1 \pm f(x)$ 或易化为 $1 \pm f(x)$ 形式的幂指函数的极限. 其解法: 设 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \infty$, 则 $\lim [1 \pm f(x)]^{g(x)} = e^{\lim g(x) \ln [1 \pm f(x)]} = e^{\lim g(x) [\pm f(x)]}$.

用语言叙述为: 括号中 1 后的变量 (包括符号) 与幂乘积的极限就是 1^∞ 这种未定式极限的幂, 其底为 e .

(2) 利用数恒等式 $\Rightarrow e^{\infty \cdot \ln 1} = e^{\infty \cdot 0} \Rightarrow e^{\left(\frac{\infty}{\infty} \cdot 0\right)}$.

设 $\lim f(x) = 1, \lim g(x) = \infty$, 则 $\lim [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)}$.

(适用于底为单因子的呈 1^∞ 型幂指函数的极限的求法).

典例精析 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

【分析】本题属于 1^∞ 型未定式, 可化为 $\frac{0}{0}$ 型求解.

【解】原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\arcsin x - x}{x} \right]^{\frac{1}{x^2}}$.

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{3x^2 \sqrt{1-x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2 \sqrt{1-x^2} (1 + \sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

\therefore 原极限 $= e^{\frac{1}{6}}$.

※ 题型演练 12 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctan x)^{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}}$



题型 13 无穷小量的比较

方法和规律: 利用洛必达法则和等价无穷小代换求解.

典例精析 设 $g(x) = \int_0^1 e^{tx} dt - 1$, $f(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的

- (A) 同阶而非等价无穷小 (B) 等价无穷小
(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小

【分析】 本题运用洛必达法则即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } g(x) &= \int_0^1 e^{tx} dt - 1 \stackrel{\text{令 } u = tx}{=} \int_0^x e^u \frac{du}{x} - 1 = \frac{\int_0^x e^u du - x}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^u du - x}{x \int_0^x \sin(t^2) dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\int_0^x \sin(t^2) dt + x \sin(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\sin(x^2) + \sin(x^2) + 2x^2 \cos(x^2)} = \infty. \end{aligned}$$

故 $g(x)$ 是 $f(x)$ 低阶无穷小.

※ 题型演练 13 确定如下无穷小的阶 n :

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $3x - 4\sin x + \sin x \cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小, 则 $n =$ _____.

(2) 当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $\sqrt{3x^2 - 2x - 1} \cdot \ln x$ 与 $(x - 1)^n$ 为同阶无穷小, 则 $n =$ _____.

题型 14 极限式中常数值确定

方法和规律: 求极限式中的常数值, 主要根据极限存在这一前提, 利用等价无穷小, 洛必达法则及如下公式:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m \\ 0, & \text{当 } n < m \\ \infty, & \text{当 } n > m \end{cases}$$

有时也用到根式有理化, 函数连续的充要条件.

典例精析 已知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}}{x^m} = a (\neq 0)$ 求常数 m, a .

【分析】 本题先利用等价无穷小量的代换, 然后利用洛必达法则求解.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } \because \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\arctan x - \ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^m} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}}{mx^{m-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4x^2}{mx^{m-1}(1+x^2)(1-x^2)} = -\frac{4}{m} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{m-3}(1+x^2)(1-x^2)} \\ &= -\frac{4}{m} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{m-3}} = a \Rightarrow \begin{cases} m-3=0 \\ -\frac{4}{m} = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ a=-\frac{4}{3} \end{cases} \end{aligned}$$



※ 题型演练 14 已知 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan 3x$ 与 $\frac{ax}{\cos x}$ 是等价无穷小, 试确定 a 值.

题型 15 函数连续性的讨论(重点)

方法和规律: 因为初等函数在其定义区间内总是连续的, 所以关于函数连续性的讨论, 主要是指非初等函数而言的, 如某些由极限定义的函数、带绝对值符号的函数、分段函数等等, 其难点是讨论函数在一点处的连续性. 讨论函数在一点 x_0 处的连续性时, 若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的两侧表达式不相同, 则一般是先求 $f(x)$ 在 x_0 的左、右极限, 然后根据函数在点 x_0 连续的充要条件 (即 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$) 来判断在点 x_0 处是否连续. 需要特别强调的是, 计算 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 时, 只能用 x_0 左边的函数表达式, 而计算 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 时, 则只能用 x_0 右边的函数表达式; 若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的两侧为同一表达式, 则直接用 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 来判断在点 x_0 处是否连续.

【例 1.35】(1) 讨论 $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & |x| > 1 \\ \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1 \end{cases}$ 的连续性.

(2) 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + (2x)^n + x^{2n}}$ 的连续性 ($x \geq 0$).

典例精析 讨论 $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & |x| > 1 \\ \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1 \end{cases}$ 的连续性.

【分析】讨论函数在分段处的左右极限.

【解】将 $f(x)$ 改写成 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < -1 \\ \cos \frac{\pi x}{2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$

显然, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ 内连续. 下面讨论 $f(x)$ 在 $x = -1$ 与 $x = 1$ 处的连续性.

当 $x = -1$ 时, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (1-x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \cos \frac{\pi x}{2} = 0$,

因为 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(1)$, 故 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处间断.

当 $x = 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos \frac{\pi x}{2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$,

因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续.

综上所述 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ 连续.

※ 题型演练 15 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + (2x)^n + x^{2n}}$ 的连续性 ($x \geq 0$).

题型 16 确定函数的间断点及其类型

方法和规律: 确定函数的间断点, 可按以下步骤进行: (1) 找出 $f(x)$ 的定义域, 若 $x = x_0$ 点无定义, 则 $x = x_0$ 为间断点. 若有定义, 再检验下步; (2) 检查 $x = x_0$ 是否为初等函数定义区间内的点. 若是, 则 x_0 为 $f(x)$ 的连续点; 否则看 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则 x_0 为



$f(x)$ 的间断点;若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在,再检查下一步;(3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则 x_0 为连续点;若不相等,则 $x = x_0$ 为间断点. 最后根据定义,判断间断点的类型.

典例精析 求函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x}{\sin \pi x}, & x < 0 \\ \ln(1+x) + \sin \frac{1}{x^2 - 1}, & x \geq 0 \end{cases}$ 的间断点,并指出其类型.

【分析】先求出间断点,然后分别讨论其类型.

【解】当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{x^3 - x}{\sin \pi x}$. 由 $\sin \pi x = 0$ 得 $x = -1, -2, -3, \dots$

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \ln(1+x) + \sin \frac{1}{x^2 - 1}$. 由 $x^2 - 1 = 0$ 解得 $x = 1$,

所以 $f(x)$ 在 $x = 1, -1, -2, -3, \dots$ 处间断,在分段点 $x = 0$ 处可能间断,在除去以上点的其他区间上 $f(x)$ 是初等函数,故连续.

因为在 $x_0 = -2, -3, \dots$ 处, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x}{\sin \pi x} = \infty$, 所以 $x_0 = -2, -3, \dots$ 均是 $f(x)$ 的无穷间断点,属第二类.

$$\begin{aligned} \text{在 } x_0 = -1 \text{ 处, } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{\sin \pi x} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-1)(x+1)}{\sin \pi x} \\ &\stackrel{\text{令 } x = y-1}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y-1)(y-2)y}{-\sin \pi y} = -\frac{2}{\pi}, \end{aligned}$$

所以 $x_0 = -1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点,属第一类.

如果令 $f(-1) = -\frac{2}{\pi}$, 则 $f(x)$ 在 $x_0 = -1$ 处连续.

$$\text{在 } x_0 = 0 \text{ 处, } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - x}{\sin \pi x} = -\frac{1}{\pi},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln(1+x) + \sin \frac{1}{x^2 - 1} \right] = -\sin 1,$$

所以 $x_0 = 0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点,属第一类.

在 $x_0 = 1$ 处, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在. 所以 $x_0 = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

※ 题型演练 16 求 $f(x) = \frac{\ln |x|}{x^2 - 3x + 2}$ 的间断点,并指出其类型.

题型 17 分段函数式中参数的确定(重点)

方法和规律: 求解此类问题的基本思路是:根据分段函数在其分段点处的性质来确定所含常数的值. 例如,如果已知一函数在某点连续,则根据函数在该点连续的充要条件来求解.

典例精析 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{a(1 - \cos x)}{x^2}, & x > 0 \\ 8, & x = 0 \\ \frac{b \sin x + \int_0^x e^t dt}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 连续,确定常数 a 与 b .

【分析】本题为已知函数在某点连续,则根据函数在该点连续的充要条件来求解.



【解】 $\because f(x)$ 连续, $\therefore f_-(0) = f_+(0) = f(0)$,

$$\begin{aligned} \text{又 } f_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{b \sin x + \int_0^x e^t dt \left(\frac{0}{0} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (b \cos x + e^x) \\ &= b + 1 = f(0) = 8 \Rightarrow b = 7, \end{aligned}$$

$$f_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a(1 - \cos x) \left(\frac{0}{0} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a \sin x}{2x} = \frac{a}{2} = f(0) = 8 \Rightarrow a = 16.$$

【评注】在求分段点的左右极限可利用洛必达法则求解.

※ 题型演练 17 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数, $f(0) = 0$, 且 $f'(0) = b$, 若函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) + a \sin x}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x = 0 \text{ 处连续, 确定常数 } A.$$

阶梯化训练题

· 基础能力题 ·

一、单项选择题

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = x^2 + 2x \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 则与 $f(x)$ 等价的函数是.

(A) $y = \int_0^x (x^2 - 2x) dx.$

(B) $y = \int_0^1 (x^2 - 2x) dt.$

(C) $y = \int f'(x) dx.$

(D) $y = e^{\ln(x^2 - 2x)}.$

[]

2. 函数 $y = \ln(\sec x + \tan x)$ 是

(A) 以 2π 为周期的偶周期函数.

(B) 以 2π 为周期的奇周期函数.

(C) 以 2π 为周期的非奇非偶函数.

(D) 以 π 为周期的周期函数.

[]

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 则

(A) 当 $f'(x)$ 为单调函数时, $f(x)$ 一定为单调函数.

(B) 当 $f(x)$ 为单调函数时, $f'(x)$ 一定为单调函数.

(C) 当 $f'(x)$ 为偶函数时, $f(x)$ 一定为奇函数.

(D) 当 $f(x)$ 为奇函数时, $f'(x)$ 一定为偶函数.

[]

4. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 使

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$.

[]

5. 函数 $y = f(u)$ 在 u_0 连续, 则函数 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 连续是复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处连续的

(A) 充分必要条件.

(B) 充分非必要条件.

(C) 必要非充分条件.

(D) 非充分非必要条件.

[]

6. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{\int_0^{x^2} e^{t^2} dt} = 3$, 则



(A) $a = 1, b = -\frac{7}{2}$.

(B) $a = 0, b = -2$.

(C) $a = 0, b = -\frac{7}{2}$.

(D) $a = 1, b = -2$.

[]

7. 设曲线 $y = ax^2$ 与 $y = \ln x$ 相切, 则 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2e}} [1 + (x - a)]^{\frac{1}{\sin(x-a)}}$ 等于

(A) 1.

(B) e.

(C) 0.

(D) a.

[]

8. 设 $\varphi(x) = \int_0^{\sqrt{1+x}-1} \ln(1+t) dt$, $\psi(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} \arcsin t dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\varphi(x)$ 是 $\psi(x)$ 的

(A) 低阶无穷小.

(B) 同阶无穷小.

(C) 等价无穷小

(D) 高阶无穷小.

[]

9. 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \arctan t^2 dt$, $g(x) = \int_0^x (3t^2 + t^3 \cos t) dt$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 高阶无穷小.

(B) 低阶无穷小.

(C) 等价无穷小.

(D) 同阶而非等价无穷小.

[]

10. 设 $f(x)$ 、 $\varphi(x)$ 在点 $x = 0$ 的某邻域内连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的高阶无穷小, 则

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x f(t) \sin t dt$ 是 $\int_0^x t \varphi(t) dt$ 的

(A) 低阶无穷小.

(B) 高阶无穷小.

(C) 同阶但不等价的无穷小.

(D) 等价无穷小.

[]

11. 设 $f(x)$ 有一阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$ =

(A) e.

(B) e^2 .

(C) e^3 .

(D) e^{-1} .

[]

12. 设 $y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = \sin 2x + 2e^x$ 满足初始条件

$y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+y(x))}{x^2}$ 的极限

(A) 不存在.

(B) 等于 0.

(C) 等于 1.

(D) 不能确定. []

13. 设 $I_R = \oint_{x^2+y^2=\frac{1}{R^2}} \frac{ydx - xdy}{(x^2 + y^2 + z^2)}$, 则 $R \rightarrow 0$ 时, 下面说法正确的是

(A) I_R 是 R 的一阶无穷小.

(B) I_R 是 R 的二阶无穷小.

(C) I_R 是 R 的三阶无穷小.

(D) I_R 至少是 R 的三阶无穷小. []

二、填空题

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{x+1} \right)^{\frac{6x}{x-1}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{2(1+2+\cdots+k)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{\tan 2x} \right]}{2^x - 1} = 5$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$



5. 设 $S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____.

6. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1 + b \ln \cos x}{\sin 2x + \sqrt{1 - cx^2} - 1} = -1$, 则 $a =$ _____.

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x e^{-t^2} dt}{1 - e^{-x^2}} =$ _____.

8. 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(1) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(xt) dt}{x^2 - 1} =$ _____.

三、解答题

1. 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \cos \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} \cos \frac{n-1}{n} + \frac{n}{n} \cos \frac{n}{n} \right) \sin \frac{\pi}{n}$.

2. 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}$.

3. 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx$.

4. 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1 + e^x} dx$.

5. 求解以下各小题中的 $f(x)$ 表达式:

(1) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} + \sin\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2, \quad |x| > 1.$

(2) $f(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x, \quad 0 < x < 1.$

· 综合提高题 ·

1. 证明: 若函数 $f(x)$ 是连续的, 则函数 $f_*(x) = \begin{cases} -c, & \text{若 } f(x) < -c, \\ f(x), & \text{若 } |f(x)| \leq c, \\ c, & \text{若 } f(x) > c. \end{cases}$ ①
②
③

其中 c 为任意正数, 也是连续函数.

2. 设 $f(x)$ 满足方程: $af(x) + bf\left(-\frac{1}{x}\right) = \sin x$, 其中 $|a| \neq |b|$, 求 $f(x)$.

3. 设 $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2 + \cos(xy)$, 求 $f(x, y)$.

4. 设 $f(x)$ 是以 $T > 0$ 为周期的函数, 证明 $f(ax)$ ($a > 0$) 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的函数.

5. 设函数 $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于 $x = a, x = b$ 均对称 ($a \neq b$), 求证: $y = f(x)$ 是周期函数, 并求其周期.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, 证明 $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ 在 (a, b) 内单调增加.

7. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2 & x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.



8. 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, $\varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

9. 设 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, 其中 $a > 0, x_0 > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

10. 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$.

11. 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{1/n}}{n+1} + \frac{2^{2/n}}{n + \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{n/n}}{n + \frac{1}{n}} \right)$.

12. 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{3^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right) \right]^{\frac{1}{n}}$.

13. 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_n^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt$.

14. 求极限: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x-1})}{\arcsin \sqrt[3]{x-1}}$.

15. 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}$.

16. 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

17. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1 + t^2)^2 dt}{x(\arctan x)^4}$;

(2) 设 $f(x) = \int_{x^2}^x \frac{\sin(xt)}{t} dt$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$;

(3) 设 $f'(x)$ 连续, $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t) dt}{x^2 \int_0^x f(t) dt}$.

18. 求极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x^2 + 3}}{2x - \sqrt{2x^4 - 1}}$

19. 求极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + e^{-x}}{3e^x + 2e^{2x}}$.

20. 求极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$.

21. 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

22. $f(x)$ 在 a 处可导, $f(a) \neq 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right]^n$.

23. 确定常数, 使 $y = x - (a + b \cos x) \sin x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 取得尽可能高阶的无穷小量.

24. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} (a > 0), & -1 < x < 0 \\ \frac{(m-1)x - m}{x^2 - x - 1} (m \neq 0), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$, 问 a 为何值时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.



25. 确定下列各题中的常数:

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^3} - ax + b) = 0$, 确定常数 a, b .

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{ax^2 + bx + 1}) = 2$, 求常数 a, b .

(3) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x^5 + 4x^4 - 2)^c - x] = A (A \neq 0)$, 求 c, A .

26. (1) 设 $f(x) = \sin x, g(x) = \begin{cases} x - \pi, & x \leq 0 \\ x + \pi, & x > 0 \end{cases}$, 试证在点 $x = 0$ 处 $f[g(x)]$ 连续.

(2) 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n} (x > 0)$ 在定义域内的连续性.

27. 试确定 a, b 之值, 使 $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x = 0$ 及可去间断点 $x = 1$.

28. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ a, & x \geq 1 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} b, & x < 0 \\ x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$, 试问 a, b 为何值时, 函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续?

29. 设 $F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x tf(t) dt}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$, 其中 $f(x)$ 具有连续导数且 $f(0) = 0$, 试确定 c 使 $F(x)$ 连续, 并讨论 $F'(x)$ 是否连续.

30. 求下列极限:

(1) 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 求 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx$.

(2) 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^h \frac{1}{h} (1 - \frac{|x|}{h}) \cos(\frac{\pi}{3} - x) dx, (h > 0)$.

参 考 答 案

◆ 题型演练答案

1. 【解】 $F(x) = f(x) + \int_0^x [\int_0^u f(t) dt] du, \quad \text{①}$

$F(-x) = f(-x) + \int_0^{-x} [\int_0^u f(t) dt] du, \quad \text{②}$

$\because f(x)$ 为奇函数 $\therefore f(x) + f(-x) = 0, \quad \text{③}$

又 $\because \int_0^{-x} [\int_0^u f(t) dt] du \xrightarrow{\text{令 } u = -v} \int_0^x [\int_0^{-v} f(t) dt] (-dv) = - \int_0^x [\int_0^{-u} f(t) dt] du, \quad \text{④}$

由 ①, ②, ③, ④ 得

$F(x) + F(-x) = \int_0^x [\int_0^u f(t) dt - \int_0^{-u} f(t) dt] du = \int_0^x [\int_{-u}^u f(t) dt] du = 0,$

故 $F(x)$ 为奇函数.

2. 【证】 令 $g(x) = \int_0^x te^{t^2} dt,$

$\therefore g(-x) = \int_0^{-x} te^{t^2} dt \xrightarrow{\text{令 } u = -t} \int_0^x -ue^{(-u)^2} (-du) = \int_0^x ue^{u^2} du,$



$\therefore g(x)$ 为偶函数. 因此 $f(x) = e^{-x^2}g(x)$ 也为偶函数, 所以只需证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界即可.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x te^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{2},$$

\therefore 对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists X > 0$, 当 $x \in [X, +\infty)$ 时, 有

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}, \quad \text{即} \quad 0 < f(x) < 1.$$

又 $f(x)$ 在 $[0, X]$ 上连续, 于是, $\exists l > 0$, 使对 $\forall x \in [0, X]$, 恒有 $0 \leq f(x) \leq l$, 取 $M = \max\{1, l\}$, 则对 $\forall x \in [0, +\infty)$, 有 $0 \leq f(x) \leq M$. 因 $f(x)$ 为偶函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

$$3. \text{【解】} f_2(x) = f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} / \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x) = f[f_2(x)] = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

比较以上两式可知 $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ (由数学归纳法可证.)

$$\text{于是} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} = \frac{x}{|x|} \quad (x \neq 0).$$

4. 【解】 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限,

$$\Rightarrow l = 1 + \frac{l}{1+l} \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{由题设可知 } l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在:

$$\begin{aligned} |x_n - l| &= \left| \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right) - \left(1 + \frac{l}{1+l}\right) \right| \\ &= \frac{|x_{n-1} - l|}{|(1+x_{n-1})(1+l)|} < \frac{|x_{n-1} - l|}{2(1+l)} < \cdots < \frac{|x_1 - l|}{2^{n-1}(1+l)} = \frac{\frac{l}{1+l}}{2^{n-1}(1+l)} = \frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2} &= 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

5. 【解】 因为每一项中提出 $\frac{1}{n}$ 后, 剩余各项不能用一个通项表示出来, 所以不能用定积分定义求解.

$$1 \leftarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\text{故} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

$$6. \text{【解】} \therefore \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1},$$

$$\text{又} \quad \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{n(n+1)}, \quad \prod_{k=2}^n \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \frac{n^2+n+1}{3},$$

$$\therefore \text{原极限} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2+n+1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$7. \text{【解】} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \text{其中 } \varepsilon > 0 \text{ 为任意正数,}$$



$$\text{而 } 0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x dx = \sin^n \xi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} dx = \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \sin^n \xi \leq \frac{\pi}{2} \sin^n \xi,$$

其中 $0 < \xi < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, 由于 $0 < \sin \xi < 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \sin^n \xi = 0$.

$$\text{又 } 0 < \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \varepsilon, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0 (\because \varepsilon \text{ 为任意正数})$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

$$\begin{aligned} 8. \text{【解】 原极限} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \cdot \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \cdots \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \cdots \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3x^{-\frac{2}{3}}} \cdots \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{n x^{\frac{1-n}{n}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

$$9. \text{【解】 原极限} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2} dt}{xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x^2)e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{1+2x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} 10. \text{【解】 原极限} &= \lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{1}{u} - \frac{\ln(1+u)}{u^2} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u - \ln(1+u)}{u^2} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+u}}{2u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{2u(1+u)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \text{【解】 原极限} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{1+x}}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1 + (\frac{x}{1+x})^2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}}{-x^{-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(1+x)^2 + x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. \text{【解】 原极限} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \ln(\arctan x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \ln x} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13. \text{【解】 (1) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 4\sin x + \sin x \cos x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 4\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x}{x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 4\cos x + \cos 2x}{n x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin x - 2\sin 2x}{n(n-1)x^{n-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\cos x - 4\cos 2x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\sin x + 8\sin 2x}{n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\cos x + 16\cos 2x}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}}, \end{aligned}$$

当 $n-5=0$ 时, 即 $n=5$ 时, 极限 $= \frac{12}{5!}$, 故 取 $n=5$.

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{3x^2 - 2x - 1} \cdot \ln x}{(x-1)^n} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{3x+1} \cdot \sqrt{x-1} \ln[1 + (x-1)]}{(x-1)^n} \\ &\stackrel{\text{令 } u = x-1}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3u+4} \sqrt{u} \ln(1+u)}{u^n} = 2 \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{u^n}, \end{aligned}$$

当 $n = \frac{3}{2}$ 时, 其极限 $= 2$, 故 取 $n = \frac{3}{2}$.

$$14. \text{【解】 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan 3x}{ax/\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x \cdot 3x}{ax} = \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = 3.$$

$$15. \text{【解】 若 } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \text{ 则 } \sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{2 + (2x)^n + x^{2n}} < \sqrt[n]{4},$$



若 $\frac{1}{2} < x < 2$, 则 $2x < \sqrt[n]{2 + (2x)^n + x^{2n}} = 2x \sqrt[n]{2(2x)^{-n} + 1 + 2^{-n}x^n} < 2x \sqrt[n]{4}$

若 $2 \leq x < +\infty$, 则 $x^2 < \sqrt[n]{2 + (2x)^n + x^{2n}} = x^2 \sqrt[n]{2x^{-2n} + 2^n x^{-n} + 1} < x^2 \sqrt[n]{3}$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4} = 1$,

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x, & \frac{1}{2} < x < 2 \\ x^2, & 2 \leq x < +\infty \end{cases}$$

而 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$, $(\frac{1}{2}, 2)$, $(2, +\infty)$ 上是初等函数, 所以连续.

$$\begin{aligned} \text{又, } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) &= 1, & \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) &= 1, & f(\frac{1}{2}) &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 4, & \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 4, & f(2) &= 4, \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

16. 【解】由 $\ln|x|$ 的定义域知 $x \neq 0$. 又由

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{得} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2,$$

而 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$ 内是初等函数, 所以连续, 故 $f(x)$ 的可能间断点是 $x = 0, 1, 2$.

$$\because \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 2) = 2, \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty,$$

故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点, 属第二类.

又 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$. 所以, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 属第一类.

如果我们补充 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的定义, 即令 $f(1) = -1$, 这时 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处就连续了.

在 $x = 2$ 处, 因为 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$, 故 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点, 属第二类.

$$17. 【解】 \text{由题设, } \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} + a \frac{\sin x}{x} \right] = f'(0) + a = b + a,$$

又 $F(0) = A$, 因为 $F(x)$ 在 $x = 0$ 点处连续, 所以有 $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0)$, 由此得 $A = b + a$.

◆ 基础能力题答案

一、单项选择题

1. 【解】设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l$, 则 $f(x) = x^2 + 2xl$,

两边取 $x \rightarrow 1$ 时的极限, 得 $l = 1 + 2l \Rightarrow l = -1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x$.

(A) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ 与 $f(x)$ 的对应关系不同.

$$(B) y = \int_0^1 (x^2 - 2x) dt = x^2 - 2x.$$

(C) $y = f(x) + C = x^2 - 2x + C$ 与 $f(x)$ 对应关系不同.

(D) $y = e^{\ln(x^2 - 2x)}$, 定义域 $x < 0$ 或 $x > 2$, 与 $f(x)$ 定义域不同.

故(B)入选, 实际做题时不必像以上那样处理, 求出 $f(x)$ 的表达式后一眼即可看出(B)入选.

$$2. 【解】 y = \ln(\sec x + \tan x) = \ln\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \ln\left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right),$$

可知, 是 2π 为周期的周期函数.



$$\begin{aligned}\because f(x) + f(-x) &= \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) + \ln\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right) = \ln \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \ln \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \ln 1 = 0.\end{aligned}$$

$\therefore f(x) = \ln(\sec x + \tan x)$ 为奇函数, 故(B) 入选.

3.【解】用举反例法.

设 $f'(x) = x$ 为单调, 则 $f(x) = x^2 + C$ 非单调, (A) 不入选.

$f(x) = x$ 为单调, 则 $f'(x) = 1$, 非单调, (B) 不入选.

$f'(x) = x^2 + 1$ 为偶函数, 则 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + C$ 不是奇函数. (C) 不入选. 故(D) 入选.

4.【解】根据定义证 $\because f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} > 0$, 由保号性定理

得 \exists 一个 $\delta > 0$, 当 $x \in (0, \delta)$ 时, $\frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$, 即 $f(x) - f(0) > 0$,

亦即 $f(x) > f(0)$

故应选(C).

5.【解】由复合函数的连续性定理可知, 函数 $f(u)$ 在 u_0 连续, $u = \varphi(x)$ 在 x_0 连续, 且 $u_0 = \varphi(x_0)$, 则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处连续, 故知 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处连续是复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处连续的充分条件. 但 $f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处连续, $f(u)$ 未必在 u_0 处连续, $\varphi(x)$ 也未必在 x_0 连续, 如狄里赫莱函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

在 \mathbb{R} 上任一点都不连续, 但复合函数 $f[f(x)] = 1$ 是 \mathbb{R} 上的连续函数. 可知条件并非必要.

由以上分析可知, 条件是充分而非必要, 故(B) 入选.

$$\begin{aligned}6.【解】 I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - (a+2bx)}{2xe^{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (a+2bx)(1+x)}{2x(1+x)e^{x^4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (a+2bx)(1+x)}{2x},\end{aligned}$$

$\because x \rightarrow 0$ 时, 分母 $\rightarrow 0$, 且极限 $= 3$, $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} [1 - (a+2bx)(1+x)] = 0 \Rightarrow a = 1$, 于是

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+2bx)(1+x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(2b+1+4bx)}{2} = -\frac{2b+1}{2} = 3 \Rightarrow b = -\frac{7}{2},$$

故(A) 入选.

7.【解】关键求出 a . 因为 $y = ax^2$ 与 $y = \ln x$ 相切, 所以两者有公共交点, 其交点为 $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = \ln x \end{cases}$ 的解. 因为相切,

于是 $2ax = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2a}$ 代入方程组中, 得 $x = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a = \frac{1}{2e}$ 于是

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2e}} \left[1 + \left(x - \frac{1}{2e} \right) \right]^{\frac{1}{\sin(x - \frac{1}{2e})}} \stackrel{\text{令 } u = x - \frac{1}{2e}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{\sin u}} = e.$$

故(B) 入选.

$$8.【解】 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sqrt{1+x}-1} \ln(1+t) dt}{\int_0^{\frac{x}{2}} \arcsin t dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\arcsin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{x}{2} \cdot \sqrt{1+x}} = 1,$$

故(C) 项入选.

$$9.【解】 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \arctan t^2 dt}{\int_0^x (3t^2 + t^3 \cos t) dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin x)^2 \cdot \cos x}{3x^2 + x^3 \cos x} = \frac{1}{3}, \text{故应选(D).}$$



10. 【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) \sin t dt}{\int_0^x t \varphi(t) dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x}{x \varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$. 故选(B).

11. 【解】 此极限为 1^∞ 型未定式.

$$\because \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{1}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 1.$$

\therefore 原极限 $= e^1 = e$, 故(A)项入选.

12. 【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y(x))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'(x)}{2x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y''(x)}{2} = \frac{y''(0)}{2} = 1$$

故选(C).

13. 【解】 由圆周 $x^2 + y^2 = \frac{1}{R^2}$ 的参数方程: $x = \frac{1}{R} \cos \theta, y = \frac{1}{R} \sin \theta, \theta$ 从 0 到 2π ; 求出曲线积分 I_R :

$$I_R = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{R} \sin \theta (-\frac{1}{R} \sin \theta) - \frac{1}{R} \cos \theta (\frac{1}{R} \cos \theta)}{\frac{1}{R^4} (1 + \cos \theta \sin \theta)^2} d\theta$$

$$= -R^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta \sin \theta)^2} = -R^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta)^2}.$$
 应选(B).

上式右端的积分存在为常数并取正值, 则

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{I_R}{R^2} = - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta)^2} \neq 0,$$

即当 $R \rightarrow 0$ 时, I_R 是 R 的二阶无穷小量, 故应选(B).

二、填空题

1. 【解】 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{x+1} \right)^{\frac{6x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{6x}{x-1}} = e^3$.

2. 【解】 $U_n = \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{2(1+2+\dots+k)} \right]^n = \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \cdot \frac{k(k+1)}{2}} \right]^n = \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right]^n$

$$= \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right]^n = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = e^{-1}.$$

3. 【解】 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[-\frac{\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{x(1+x)} \right]$

$$= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1+x) \ln(1+x) + x}{x^2(1+x)} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x)}{x(2+3x)} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(2+3x)} = -\frac{1}{2}e.$$

4. 【解】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{\tan 2x} \right]}{2^x - 1} = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + \frac{f(x)}{\tan 2x} \right] = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\tan 2x} = 0 \Rightarrow \text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{f(x)}{\tan 2x} \sim \frac{f(x)}{2x}, 2^x - 1 \sim x \ln 2,$$

$$\text{故 } 5 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{\tan 2x} \right]}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)/2x}{x \ln 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 2 \ln 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 10 \ln 2.$$



$$5. 【解】 S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 2 \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$$

$$= 2 \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right] = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2.$$

6. 【解】 由洛必达法则

$$\text{原式} = \frac{a}{2} = -1, \text{于是有 } a = -2.$$

$$7. 【解】 I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2} dt + x e^{-x^2}}{2x e^{-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2} dt + x e^{-x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} + e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}}{2} = 1.$$

$$8. 【解】 \int_1^x f(xt) dt \stackrel{u=tx}{=} \int_x^1 f(u) \cdot \frac{1}{x} du = \frac{1}{x} \int_x^1 f(u) du, \text{于是, 原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} \int_x^1 f(u) du}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_x^1 f(u) du}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-f(x)}{2x} = -\frac{1}{2}$$

三、解答题

【补】

$$1. 【解】 \because \text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \sin \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n},$$

$$\therefore I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \cos \frac{k}{n} \right) \cdot \frac{\pi}{n} = \pi \int_0^1 x \cos x dx = \pi (\cos 1 + \sin 1 - 1)$$

$$2. 【解】 \because \sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}} = \frac{1}{n} \sqrt{\left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)},$$

$$\therefore \frac{1}{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) < \sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}} < \frac{1}{n} \left(1 + \frac{k+1}{n}\right),$$

$$\text{于是 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) < \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(1 + \frac{k+1}{n}\right) + \frac{1}{n},$$

$$\text{又 } \because \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 (1+x) dx = \frac{3}{2},$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}} = \frac{3}{2}.$$

$$3. 【解】 \because \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = \sin \xi \int_n^{n+p} \frac{dx}{x} = \sin \xi \cdot \ln \frac{n+p}{n}, n \leq \xi \leq n+p,$$

$$\text{又 } \because \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+p}{n} = 0, |\sin \xi| \leq 1,$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$

$$4. 【解】 \because 0 < \frac{x^n e^x}{1+e^x} < x^n, \therefore 0 < \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x} dx < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

$$\text{又 } \because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0, \text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x} dx = 0.$$

$$5. 【解】 (1) f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1} + \sin\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] + 2,$$

$$\text{故 } f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sin(x^2 - 2) + 2|x| > 2.$$

$$(2) f(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = 1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{1 - \sin^2 x} - 1,$$



故 $f(x) = -2x + \frac{1}{1-x}, 0 < x < \sin^2 1.$

◆ 综合提高题答案

1. 【证】 设 x_0 为定义域内任一点, 分别讨论如下:

(1) 若 $|f(x_0)| < c, \because f(x)$ 连续, \therefore 任给 $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 可使 $|f(x)| < c$, 且

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ 又由 } \textcircled{2} \Rightarrow |f_*(x) - f_*(x_0)| < \varepsilon.$$

(2) 若 $f(x_0) < -c, \because f(x)$ 连续, \therefore 任给 $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) < -c$, 且

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ 又由 } \textcircled{1} \Rightarrow |f_*(x) - f_*(x_0)| = |-c - (-c)| = 0 < \varepsilon.$$

(3) 同理可证得 当 $f(x_0) > c$ 时, $|f_*(x) - f_*(x_0)| < \varepsilon.$

(4) 若 $f(x_0) = c$, 对任给 $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon$

$$\Rightarrow c - \varepsilon < f(x) < c + \varepsilon \Rightarrow c - \varepsilon < f_*(x) \leq c + \varepsilon \Rightarrow |f_*(x) - c| < \varepsilon \Rightarrow |f_*(x) - f_*(x_0)| < \varepsilon.$$

(5) 同理可证 $f(x_0) = -c$ 的情形.

综上所述, 命题得证.

2. 【解】 令 $t = -\frac{1}{x}$, 则 $x = -\frac{1}{t}$, 于是原方程变为 $bf(t) + af(-\frac{1}{t}) = -\sin \frac{1}{t},$

由“无关特性”得 $bf(x) + af(-\frac{1}{x}) = -\sin \frac{1}{x}.$

$$\text{解联立方程组} \begin{cases} af(x) + bf(-\frac{1}{x}) = \sin x \\ bf(x) + af(-\frac{1}{x}) = -\sin \frac{1}{x} \end{cases},$$

$$\text{得} \quad f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2} (a \sin x + b \sin \frac{1}{x}).$$

3. 【解】 令 $u = x + y, v = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}$, 则

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 + \cos \frac{u^2 v}{(1+v)^2} \\ &= \frac{u^2(1-v)}{1+v} + \cos \frac{u^2 v}{(1+v)^2} \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad f(x, y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y} + \cos \frac{x^2 y}{(1+y)^2} \quad (y \neq -1).$$

4. 【证】 令 $F(x) = f(ax)$, 由于

$$F(x + \frac{T}{a}) = f[a(x + \frac{T}{a})] = f(ax + T) \stackrel{\because T \text{ 是 } f(x) \text{ 的周期}}{=} f(ax) = F(x),$$

故 $\frac{T}{a}$ 是 $f(ax)$ 的周期.

5. 【证】 由题设有 $f(a+x) = f(a-x), f(b+x) = f(b-x)$,

$$\begin{aligned} \text{于是 } f(x) &= f[a + (x-a)] = f[a - (x-a)] = f(2a-x) = f[b + (2a-x-b)] \\ &= f[b - (2a-x-b)] = f[x + 2(b-a)], \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数, 其周期 $T = 2(b-a).$

$$\begin{aligned} 6. 【证】 \quad F'(x) &= -\frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t) dt + \frac{f(x)}{x-a} = -\int_a^x \frac{f(t)}{(x-a)^2} dt + \int_a^x \frac{f(x)}{(x-a)^2} dt \\ &= \int_a^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-a)^2} dt, \end{aligned}$$

$\therefore (x-a)^2 > 0$ 且 $f(x)$ 单调增加, 当 $x > t$ 时, $f(x) - f(t) \geq 0$,



$\therefore F'(x) \geq 0$, 故 $F(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

7.【解】 用分析法求解. 所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析, 从而得出复合函数的方法.

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)} & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x) & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$$

① 当 $\varphi(x) < 1$ 时,

$$x < 0, \varphi(x) = x + 2 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1,$$

$$x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2};$$

② 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时,

$$x < 0, \varphi(x) = x + 2 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 0,$$

$$x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq \sqrt{2};$$

$$\text{综上所述 有 } f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2} & x < -1 \\ x+2 & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1} & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2-1 & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

8.【解】 图示法的解题程序: 1° 画出中间变量 $u = \varphi(x)$ 的图形; 2° 将 $y = f(u)$ 的分界点在 $x_0 u$ 坐标面上画出 (这是若干条平行于 x 轴的直线); 3° 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间; 4° 将 3° 所得结果代入 $y = f(u)$ 中便得复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间.

$$f[\varphi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + |\varphi(x)|], \quad (*)$$

作出 $u = \varphi(x)$ 的图形, 图 1.1 所示, 以及 $f(u) = \frac{1}{2}(u + |u|)$ 的分界

点 $u = 0$ (xOu 平面上的 x 轴)

当 $x < 0$ 时, $u = x, (u < 0)$

当 $x \geq 0$ 时, $u = x^2, (u \geq 0)$

将以上所得结果代入 (*) 式, 得 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

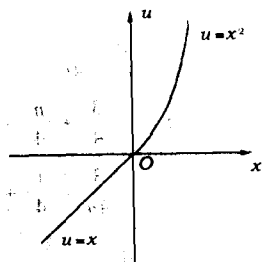


图 1.1

9.【解】 $\because x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}, \therefore \{x_n\}$ 有下界.

又 $\because \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{x_n^2}) \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{(\sqrt{a})^2}) = 1, \therefore \{x_n\}$ 单减,

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 则由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), \text{ 可得 } l = \frac{1}{2}(l + \frac{a}{l}) \Rightarrow l = \sqrt{a},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$

10.【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + (\frac{i}{n})^2}$



$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$11. 【解】 \quad \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i \leq \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2},$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

$$12. 【解】 \quad \text{取对数得} \frac{1}{n} \left[\ln(1 + \frac{1^2}{n^2}) + \ln(1 + \frac{2^2}{n^2}) + \cdots + \ln(1 + \frac{n^2}{n^2}) \right] = \sum_{i=1}^n \ln(1 + \frac{i^2}{n^2}) \cdot \frac{1}{n},$$

两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 得

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \frac{i^2}{n^2}) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx = x \ln(1 + x^2) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1 + x^2}$$

$$= \ln 2 - 2 \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = \ln 2 + \frac{\pi-4}{2},$$

$$\text{故} \quad \text{原极限} = e^{\ln 2 + (\pi-4)/2} = e^{\ln 2} \cdot e^{(\pi-4)/2} = 2e^{(\pi-4)/2}.$$

$$13. 【解】 \quad \because \cos 2t = 1 - \frac{1}{2!}(2t)^2 + o(t^2), \therefore 1 - 2t^2 \leq \cos 2t \leq 1, \text{ 于是}$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1-2t^2}{4t^2} dt \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{4t^2} dt$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} + \frac{n}{4} + \frac{1}{2n} \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq -\frac{1}{4} + \frac{n}{4}, \text{ 两边同乘以 } \frac{1}{n}, \text{ 得}$$

$$-\frac{3}{4n} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq -\frac{1}{4n} + \frac{1}{4},$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{3}{4n} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n^2}) = \frac{1}{4}, \lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{1}{4n} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt = \frac{1}{4}.$$

$$14. 【解】 \quad \because \text{当 } x \rightarrow 1 \text{ 时, } \sqrt[3]{x-1} \rightarrow 0,$$

$$\therefore \ln(1 + \sqrt[3]{x-1}) \sim \sqrt[3]{x-1}, \quad \arcsin \sqrt[3]{x-1} \sim \sqrt[3]{x-1},$$

$$\text{故} \quad \text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}} = 1.$$

$$15. 【解】 \quad \text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - \ln e^x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - \ln e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\sin^2 x}{e^x})}{\ln(1 + \frac{x^2}{e^{2x}})}$$

$$\text{由等价无穷小} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x / e^x}{x^2 / e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{e^{2x}}{e^x} = 1.$$

16. 【解】 本题是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 若直接用洛必达法则, 可知所得结果比没用法则前还复杂, 这违背了运算的原则. 也不符合所介绍的其他两种方法, 因此只有变量替换法可用了.

$$\text{令 } u = \frac{1}{x^2} \quad \text{原极限} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{50}}{e^u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{50u^{49}}{e^u} = \cdots = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{50!}{e^u} = 0.$$



$$\begin{aligned}
 17. 【解】 (1) \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1 + t^2)^2 dt}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1 + x^2)^2}{5x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{x^2} - 1 + x^2) \cdot (2xe^{x^2} + 2x)}{20x^3} \\
 &= \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 + x^2}{x^2} \\
 &= \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2} + 2x}{2x} = \frac{4}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) f(x) &= \int_{x^2}^x \frac{\sin(xt)}{t} dt \stackrel{\text{令 } u=xt}{=} \int_{x^3}^{x^2} \frac{\sin u}{u} du, \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^3}^{x^2} \frac{\sin u}{u} du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x^2}{x^2} \cdot 2x - \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot 3x^2}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x^2 - 3\sin x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x\cos x^2 - 9x^2\cos x^3}{4x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\cos x^2 - 9x\cos x^3}{4} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xf(x^2)}{2x \int_0^x f(t) dt + x^2 f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x^2)}{2 \int_0^x f(t) dt + xf(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xf'(x^2)}{2f(x) + f(x) + xf'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xf'(x^2)}{3f(x) + xf'(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f'(x^2)}{3 \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} + f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f'(0)}{3f'(0) + f'(0)} = 1.
 \end{aligned}$$

18. 【解】 用洛必达法则

$$\begin{aligned}
 \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}}{2 - \frac{4x^3}{\sqrt{2x^4 - 1}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{(x^2 + 3)^{3/2}}}{\frac{-8x^6 + 12x^2}{(2x^4 - 1)^{3/2}}} = \frac{2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x^2 + 3)^{3/2}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x^6 + 12x^2}{(2x^4 - 1)^{3/2}}} \\
 &= \frac{2}{-2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

$$19. 【解】 \text{原极限} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-3x}}{3e^{-x} + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-3x})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3e^{-x} + 2)} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 20. 【解】 \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} [(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) - (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \quad , 0 \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{-2}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x+2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{-2}{8x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$21. 【解】 \text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} \ln \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cot x} \cdot (-\frac{1}{\sin^2 x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x \tan x}{\sin^2 x} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x^2}} = e^{-1}.$$



22.【解】 原极限 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}{f(a)} \right]^n$,

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}{f(a)} \cdot n = \frac{1}{f(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}{\frac{1}{n}},$$

$$\text{又 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a) \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}{\frac{1}{n}} = f'(a),$$

于是 原极限 $= e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

23.【解】 $y = x - (a + b \cos x) \sin x$, 求其各阶导数, 得

$$y' = 1 - a \cos x - b \cos 2x, y'' = a \sin x + 2b \sin 2x, y''' = a \cos x + 4b \cos 2x,$$

令 $x \rightarrow 0$, 得 $y' \rightarrow 1 - a - b$, $y'' \rightarrow 0$, $y''' \rightarrow a + 4b$. 于是

$$\begin{cases} 1 - a - b = 0 \\ a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}.$$

故由洛必达法则可知, 取 $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$ 时, y 取得尽量高阶的无穷小.

24.【解】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow f_-(0) = f_+(0)$,

$$\text{而 } f_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(m-1)x - m}{x^2 - x - 1} = m,$$

$$\begin{aligned} f_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{x^2 + a^2} - a)(\sqrt{x^2 + a^2} + a)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)(\sqrt{x^2 + a^2} + a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2(\sqrt{x^2 + a^2} + a)} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

25.【解】 (1) 原极限 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} - a + \frac{b}{x} \right] = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} - a + \frac{b}{x} \right) = 0 \Rightarrow -1 - a = 0 \Rightarrow a = -1,$$

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1 - x^3} + x + b) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1 - x^3} + x) = -b$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1 \right]$$

$$= -\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right] = -\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3}\right) = 0 \Rightarrow b = 0.$$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = 0$

$$\Rightarrow 3 - \sqrt{a} = 0 \Rightarrow a = 9,$$

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{9x^2 + bx + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-bx - 1}{3x + \sqrt{9x^2 + bx + 1}} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{由抓大头}} -\frac{b}{6} = 2 \Rightarrow b = -12.$$

(3) 原极限 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x^5 + 4x^4 - 2)^c}{x} - 1 \right] = A$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^5 + 4x^4 - 2)^c - x}{x} = 0 \Rightarrow 5c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{5},$$



$$\begin{aligned}\text{于是,原极限} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[5]{1 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^5}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(\frac{4}{x} - \frac{2}{x^5} \right) = \frac{4}{5} \Rightarrow A = \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

26. (1)【证】 根据复合函数的定义有

$$f[g(x)] = \begin{cases} \sin(x - \pi), & x \leq 0 \\ \sin(x + \pi), & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -\sin x, & x \leq 0 \\ -\sin x, & x > 0 \end{cases} = -\sin x,$$

因此 $f[g(x)]$ 处处连续, 自然 $f[g(x)]$ 也在 $x = 0$ 点处连续.

(2)【解】 当 $0 < x \leq e$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left\{e^n \left[1 + \left(\frac{x}{e}\right)^n\right]\right\}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \ln\left[1 + \left(\frac{x}{e}\right)^n\right]}{n} = 1,$$

当 $x > e$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left\{x^n \left[1 + \left(\frac{e}{x}\right)^n\right]\right\}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln x + \ln\left[1 + \left(\frac{e}{x}\right)^n\right]}{n} = \ln x,$$

$$\text{于是有 } f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq e \\ \ln x, & x > e \end{cases}$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \ln x = 1, \quad \text{且 } f(e) = 1,$$

可知 $f(x)$ 在 $x = e$ 点连续, 从而 $f(x)$ 在定义域 $x > 0$ 上连续.

27. 【解】 若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - b}{(x - a)(x - 1)} = \infty$,

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - a)(x - 1)}{e^x - b} = \frac{a}{1 - b} = 0,$$

所以, 当 $a = 0, b \neq 1$ 时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

若 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 则当 $a \neq 1, b = e$ 时, 以下极限存在:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - b}{(x - a)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{(x - a)(x - 1)} = \frac{e}{1 - a} \left(\because \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = 1 \right),$$

因此, 当 $a \neq 1, b = e$ 时, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

综上所述 当 $a = 0, b = e$ 时 $f(x)$ 有无穷间断点 $x = 0$ 及可去间断点 $x = 1$.

28. 【解】 对 $f(x), g(x)$ 在 $x < 0, 0 \leq x < 1, x \geq 1$ 上分别求和得

$$F(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ 2x + 2, & 0 \leq x < 1, \\ x + 2 + a, & x \geq 1 \end{cases}$$

为使 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 只需选择 a, b , 使 $F(x)$ 在 $x = 0$ 点和 $x = 1$ 点连续.

$$\because \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + b) = b, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 2) = 2, \text{ 又 } F(0) = 2,$$

\therefore 当 $b = 2$ 时, $F(x)$ 在 $x = 0$ 点连续.

$$\text{同理, } \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 2) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2 + a) = 3 + a, \text{ 又 } F(1) = 3 + a,$$

当 $3 + a = 4$ 时, 即 $a = 1$ 时, $F(x)$ 在 $x = 1$ 点连续.

故 当 $a = 1, b = 2$ 时, $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

$$29. 【解】 \text{由洛必达法则, 有 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x tf(t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{2x} = \frac{f(0)}{2} = 0,$$

所以当 $c = 0$ 时, $F(x)$ 在 $x = 0$ 点连续.

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } F'(x) = \frac{f(x)}{x} - 2 \frac{\int_0^x tf(t) dt}{x^3},$$



$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\int_0^x tf(t) dt}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x tf(t) dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x} = \frac{1}{3}f'(0),$$

$$\text{于是 } F'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \frac{2 \int_0^x tf(t) dt}{x^3}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{3}f'(0), & x = 0 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \text{并且有 } \lim_{x \rightarrow 0} F'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2 \int_0^x tf(t) dt}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xf(x) + x^2 f'(x) - 2xf(x)}{3x^2} = \frac{1}{3}f'(0) = F'(0), \end{aligned}$$

因此 $F'(x)$ 在 $x = 0$ 点连续.

$\therefore F'(x)$ 在整个定义域内连续.

30. 【解】 (1) 由于 $f(x)$ 为抽象函数, $\int_{-1}^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx$ 不易积分, 因此考虑用积分中值定理.

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx &= \int_{-1}^{-\frac{1}{h}} \frac{hf(x)}{h^2 + x^2} dx + \int_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}} \frac{hf(x)}{h^2 + x^2} dx + \int_{\frac{1}{h}}^1 \frac{hf(x)}{h^2 + x^2} dx \\ &\stackrel{\text{由积分中值定理}}{=} f(\xi_1) \arctan \frac{x}{h} \Big|_{-1}^{-\frac{1}{h}} + f(\xi_2) \arctan \frac{x}{h} \Big|_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}} + f(\xi_3) \arctan \frac{x}{h} \Big|_{\frac{1}{h}}^1, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } -1 \leq \xi_1 \leq -\frac{1}{h}, -\frac{1}{h} \leq \xi_2 \leq \frac{1}{h}, \frac{1}{h} \leq \xi_3 \leq 1.$$

$$\text{由于 } \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\xi_1) \arctan \frac{x}{h} \Big|_{-1}^{-\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\xi_1) \left(\arctan \frac{1}{h} - \arctan \frac{1}{\sqrt{h}} \right) = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(\xi_3) \arctan \frac{x}{h} \Big|_{\frac{1}{h}}^1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\xi_3) \left(\arctan \frac{1}{h} - \arctan \frac{1}{\sqrt{h}} \right) = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(\xi_2) \arctan \frac{x}{h} \Big|_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\xi_2) \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{h}} + \arctan \frac{1}{\sqrt{h}} \right) = \pi f(0),$$

故 原极限 $= \pi f(0)$.

$$(2) \int_{-h}^h \frac{1}{h} \left(1 - \frac{|x|}{h} \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) dx = \int_{-h}^h \frac{1}{h} \left(1 - \frac{|x|}{h} \right) \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x \right) dx$$

$$\stackrel{\text{利用对称区间上}}{\text{奇偶函数积分性质}} 2 \int_0^h \frac{1}{h} \left(1 - \frac{x}{h} \right) \frac{1}{2} \cos x dx = \int_0^h \frac{h-x}{h^2} \cos x dx,$$

$$\text{故 原极限} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \int_0^h \cos x dx - \int_0^h x \cos x dx}{h^2} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h \cos x dx + h \cosh - h \cosh}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh}{2} = \frac{1}{2}.$$

第二章 导数与微分

命题特点:

本部分一般出填空题和单项选择题,若和其他章节联合出题,一般以大题为主.

题型归纳与精讲

题型1 求函数在某点处的导数

方法和规律: 在函数表达式中含有抽象函数记号,仅知其连续,不知其是否可导,求其导数时必须用导数定义;求分段函数(或带绝对值符号的函数)在分界点处的导数,必须用导数的定义;对带绝对值符号的函数在求导前一定要先去掉绝对值符号.某些简单函数在某点处的导数用导数定义求有时也相当方便.

典例精析

求函数在指定点处的导数:

设 $f(x) = \varphi(a+bx) - \varphi(a-bx)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 求 $f'(0)$.

【分析】 本题含抽象函数记号, 仅知其连续, 不知其是否可导.

【解】 由 $f(x) = \varphi(a+bx) - \varphi(a-bx)$, 可知 $f(0) = \varphi(a) - \varphi(a) = 0$,

因为只说明 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 没说明 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导, 所以求 $f'(0)$ 时必须用导数的定义.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(a+bx) - \varphi(a-bx)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\varphi(a+bx) - \varphi(a)] - [\varphi(a-bx) - \varphi(a)]}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(a+bx) - \varphi(a)}{bx} \cdot b + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(a-bx) - \varphi(a)}{-bx} \cdot b \\ &= b\varphi'(a) + b\varphi'(a) = 2b\varphi'(a). \end{aligned}$$

※ 题型演练 1 $f(x) = \arcsin x \cdot \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$, 求 $f'(0)$;

题型2 求函数方程

方法和规律: 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且 $f'(x_0)$ 存在是必不可少的前提条件, 再附加条件, 求 $f(x)$ 的题型一般是: 先由附加条件求出 $f(x_0) = 0$, 再由导数定义写出



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

典例精析

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且 $f'(0) = a (a \neq 0)$.

又对 $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$, 求 $f(x)$.

【分析】本题利用导数定义 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 及已知等式, 即可求解.

【解】在 $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ 中令 $y=0$, 得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x)+f(0)}{1-f(0)f(x)} \Rightarrow f(x) - f(0)f^2(x) = f(x) + f(0) \\ &\Rightarrow f(0)[1+f^2(x)] = 0 \Rightarrow f(0) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)f(\Delta x)} - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)[1+f^2(x)]}{\Delta x[1-f(x)f(\Delta x)]} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(\Delta x)} \\ &= f'(0)[1+f^2(x)] \end{aligned}$$

($\because f'(0)$ 存在, $\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 于是 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = f(0) = 0$)

$$\Rightarrow \frac{df(x)}{1+f^2(x)} = f'(0)dx \Rightarrow \arctan f(x) = f'(0)x + C$$

$$\Rightarrow \text{令 } x=0 \text{ 得 } \arctan f(0) = C \Rightarrow C=0,$$

$$\text{故 } \arctan f(x) = f'(0)x = ax \quad (\because f'(0) = a),$$

$$\text{即 } f(x) = \tan(ax).$$

※ 题型演练 2 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, 且 $f'(1) = a (a \neq 0)$, 又对 $\forall x, y \in (0, +\infty)$, 有 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 求 $f(x)$.

题型 3 求复合函数的导数

方法和规律: 复合函数求导的关键是搞清函数的复合关系, 从外层到里层一层一层地求导, 既不重复, 又不遗漏. 当所给函数既有四则运算, 又有复合运算时, 应根据所给函数表达式的结构, 决定先用四则求导法则, 还是先用复合函数求导法则, 对于某些形式较复杂的复合函数, 可以利用微分形式不变性, 将复合函数“换元”而得到较为简单的形式后再求导, 最后乘以引入的中间变量的导数.

典例精析

求函数的导数: $F(x) = \sin x^2 \int_0^1 f(t \sin x^2) dt$, 则 $\frac{dF}{dx}$.

【分析】被积函数或其主要部分为抽象的复合函数, 一定要设中间变量, 使其为简单形式 $f(u)$, u 为中间变量.

$$\text{【解】} \int_0^1 f(t \sin x^2) dt \xrightarrow[\substack{\text{令 } u = t \sin x^2 \\ du = \sin x^2 dt}}{\int_0^{\sin x^2} f(u) \cdot \frac{1}{\sin x^2} du} = \frac{1}{\sin x^2} \int_0^{\sin x^2} f(u) du,$$